TOPOLOJİ

Babamın Anısına...

ve Aileme...

Erhan GÜLER

I. BÖLÜM

- Metrik Uzaylar -

1.1. Tanım : $X \neq \emptyset$ bir küme, $\mathbb{R}$, reel sayılar kümesini göstersin.

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longrightarrow d(x,y)$$

fonksiyonu verilsin. Her $x,y,z \in X$ için d fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlasın.

1- $d(x,y) \geq 0$

2- $d(x,y) = 0 \iff x = y$

3- $d(x,y) = d(y,x)$

4- $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Bu taktirde d fonksiyonuna X kümesi üzerinde bir metrik, (X,d): metrik uzay denir.

$d(x,y)$, x noktasının, y noktasına olan uzaklığını verir.

1. Örnek // $x,y \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$d(x,y) = |x-y|$ biçiminde tanımlanan mutlak değer fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde bir metriktir.

$\forall x,y,z \in \mathbb{R}$ için,

1- $d(x,y) \overset{?}{\geq} 0$

$d(x,y) = |x-y| \geq 0$

2- $d(x,y) = 0 \overset{?}{\iff} x = y$

$d(x,y) = |x-y| = 0 \iff x = y$

$\Rightarrow$: $d(x,y) = |x-y| = 0 \Rightarrow x-y = 0 \Rightarrow x = y$

$\Leftarrow$: $x-y = 0 \Rightarrow d(x,y) = 0$?

$x = y \Rightarrow x-y = 0 \Rightarrow |x-y| = 0 \Rightarrow d(x,y) = 0$

3- $d(x,y) = d(y,x)$

$d(x,y) = |x-y| = |y-x| = d(y,x)$

4- $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

$d(x,z) = |x-z| = |x-y+y-z| \leq |x-y| + |y-z|$

$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ $(\mathbb{R},d)$ metrik uzaydır.

2. Örnek // Boş olmayan E kümesi üzerinde bir d fonksiyonu

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \text{ ise} \\ 0, & x = y \text{ ise} \end{cases}$$

(E,d) bir metrik uzaydır.

$\forall x,y,z \in E$ için

1- $d(x,y) \overset{?}{\geq} 0$ Tanımdan dolayı gerçeklenir.

2- $d(x,y) = 0 \overset{?}{\Longleftrightarrow} x = y$

$\Rightarrow$: $d(x,y) = 0$ olsun. Tanımdan $x = y$ dir.

$\Leftarrow$: $x = y$ olsun. Tanımdan $d(x,y) = 0$ olur.

3- $d(x,y) \overset{?}{=} d(y,x)$

$x \neq y$, $d(x,y) = 1 = d(y,x)$

$x = y$, $d(x,y) = 0 = d(y,x)$

4- $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

$x = y = z \Rightarrow d(x,y) = 0$, $d(y,z) = 0$, $d(x,z) = 0$

$x \neq y \neq z$ $\quad d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

$x = y \neq z$ $\quad 0 \leq 0 + 0$

$x \neq y = z \Rightarrow d(x,y) = 1$, $d(y,z) = 0$, $d(x,z) = 1$

$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

$1 \leq 1 + 0$

(E,d) bir metrik uzaydır.

1.1. Metrik Uzayların Çarpımı :

1.1. Teorem : $(X_1, d_1), (X_2, d_2), \ldots (X_i, y_i) \ldots, (X_n, y_n)$ metrik uzayların bir ailesi ve $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ de bu kümelerin dik çarpımı olsun. Bir $d : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)$ $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in X$ olmak üzere,

$$d(x,y) = \max_{1 \leq i \leq n} \{d_i(x_i, y_i)\}$$ biçiminde tanımlansın. Bu takdirde

(X,d) bir metrik uzaydır.

İspat// $\forall x,y,z \in X$ için

$x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$

$y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$

$z=(z_1,z_2,\dots,z_n)$

1- $d(x,y) \overset{?}{\geq} 0$

$\forall\, 1\leq i\leq n$ olmak üzere $d_i(x_i,y_i)\geq 0$

$\forall i$ için sağlandığından $d(x,y)\geq 0$ dır.

2- $d(x,y)=0 \iff x=y$

$\Rightarrow$: $d(x,y)=0$ olsun. $d(x,y)=\max\limits_{1\leq i\leq n}\{d_i(x_i,y_i)\}$

$d_i(x_i,y_i)=0$ $\quad d_1(x_1,y_1)=0 \iff x_1=y_1$

$d_i(x_i,y_i)=0 \iff x_i=y_i$

$d(x,y)=0 \iff x=y$

3- $d(x,y)\overset{?}{=}d(y,x)$

$d(x,y)=\max\limits_{1\leq i\leq n}\{d_i(x_i,y_i)\}$

$d_1(x_1,y_1)=d_1(y_1,x_1)$

$\forall\, 1\leq i\leq n$ için de;

$d_n(x_n,y_n)=d_n(y_n,x_n)$ $\quad d(x,y)=d(y,x)$ olur.

4- $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$

$d(x,y)=\max\limits_{1\leq i\leq n}\{d_i(x_i,y_i)\}=d_j(x_j,y_j)$

$d(y,z)=\max\limits_{1\leq i\leq n}\{d_i(y_i,z_i)\}=d_k(y_k,z_k)$

$d_i(x_i,z_i)\leq d_i(x_i,y_i)+d_i(y_i,z_i)$

$\leq d_j(x_j,y_j)+d_k(y_k,z_k)$

$=d(x,y)+d(y,z)$

$\max\limits_{1\leq i\leq n}\{d_i(x_i,z_i)\}=d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$

(X,d) bir metrik uzaydır.

1.1. Sonuç: $X = \mathbb{R}^n$ olsun.

$d(x,y) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \{ |x_i - y_i| \}$, $(\mathbb{R}^n, d)$ bir metrik uzaydır.

1.2. Alt Metrik Uzay

1.2. Tanım: (X,d) bir metrik uzay, $A \subset X$ olsun.

Her $x,y \in A$ için $d_A(x,y) = d(x,y)$ biçiminde tanımlanan fonksiyon A üzerinde bir metriktir. Dolayısıyla (A, d_A) bir metrik uzaydır. Bu metrik uzaya (X,d) nin bir alt metrik uzayı denir.

Örnek // $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ olmak üzere

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2}$$
$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

Kabul edelim ki $A \subset \mathbb{R}^n$ olsun. $\forall\, x,y \in A$ için $d_A(x,y) = d(x,y)$ ise (A, d_A) bir metrik uzaydır.

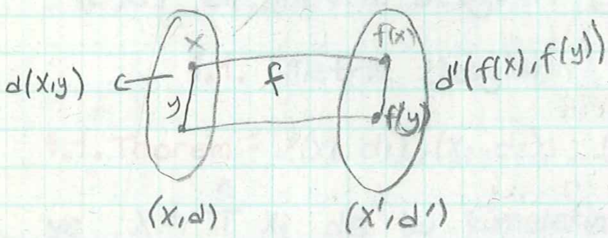
1.3. İzometriler:

(X,d) ve (X', d') bir metrik uzay,

$f : (X,d) \longrightarrow (X', d')$ olsun (ve bu fonksiyon 1:1 ve örten olsun.)

Her $x,y \in X$ için,

$d(x,y) = d'(f(x), f(y))$ sağlanıyorsa f fonksiyonuna bir izometri, bu metrik uzaylara da izometrik uzaylar denir.



(f : izometri
$(X,d), (X',d')$ izometrik uzay)

1.4. Açık ve Kapalı Yuvarlar ve Küreler:

1.4. Tanım: (X,d) bir metrik uzay $a \in X$ olsun. $r \geq 0$ olmak üzere,

$B(a,r) = \{ x \mid x \in X \;\; d(a,x) < r \}$, $B(a,r)$ ye a merkezli r yarıçaplı açık yuvar denir.

$B[a,r] = \{x \mid x \in X \quad d(a,x) \leq r\}$, $B[a,r]$ ye kapalı yuvar denir.

$S = (a,r) = \{x \mid x \in X \quad d(a,x) = r\}$ küre denir.

örnek// $\mathbb{R}$ $\quad d(x,y) = |x-y|$

$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R} \mid \ |x-a| < r\} = (a-r, a+r)$

$|x-a| < r \iff -r < x-a < r$

$a-r < x < a+r$

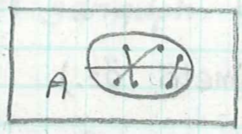
$B[a,r] = \{x \in \mathbb{R} \mid \ |x-a| \leq r\} = [a-r, a+r]$

$S(a,r) = \{x \in \mathbb{R} \mid \ |x-a| = r\} = \{a-r, a+r\}$

1.5. Çaplar, İki Alt Küme Arasındaki Uzaklık.

1.5.1. Tanım: (X,d), $A \subset X$

$$\delta(A) = \sup_{x \in A \ \ y \in A} d(x,y)$$

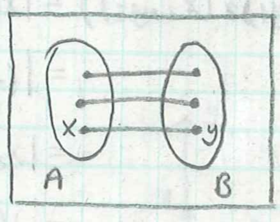


(X,d)

$\delta(A) < \infty$ ise A'ya sınırlıdır denir.

Sınırlı iki kümenin birleşimi yine sınırlıdır.

1.5.2. Tanım: (X,d), $A \subset X$ ve $B \subset X$, x; A'yı ve y de B'yi taramak üzere $d(x,y)$ nin meydana getirdiği kümenin en büyük alt sınırına, A'nın B'ye olan uzaklığı denir. Ve bu $d(A,B)$ ile gösterilir.



$$d(A,B) = \inf d(x,y) \qquad x \in A, y \in B$$

Örnek// $\mathbb{R}^2$, $x,y \in \mathbb{R}^2$ $\qquad x = (x_1, x_2)$ $\quad y = (y_1, y_2)$

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$$

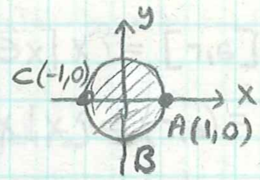
$A(1,0)$ noktasını $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$

$C(-1,0)$ noktasını alıyorum. Üçgen eşitsizliğini sağlanadığını göstermek istiyorum.

$d(A,C)$ yani çap, $d(A,C) = 2$

$d(A,B) = 0$ (A noktasıyla, kürenin içindeki en yakın nokta.

B, kürenin içidir. $d(B,C) = 0$



$$d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$$

Sorular :

S.1- $d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y) \longrightarrow d(x,y)$$

$x = (x_1, y_1)$ $y = (x_2, y_2)$

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

$(\mathbb{R}^2, d)$ metrik olup olmadığını gösteriniz.

i- $d(x,y) \geq 0$

ii- $d(x,y) = d(y,x)$ (simetri öz.)

iii- $d(x,y) = 0 \iff x = y$

iv- $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

1- $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \geq 0$?

$$|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \geq 0$$

2- $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$

$$= |(-1)(x_2 - x_1)| + |(-1)(y_2 - y_1)|$$

$$= |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$

$$= d((x_2,y_2),(x_1,y_1))$$

3- $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = 0 \iff (x_1,y_1) = (x_2,y_2)$

$$|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = 0$$

$$|x_1 - x_2| = 0 \text{ ve } |y_1 - y_2| = 0$$

$\iff x_1 - x_2 = 0$ ve $y_1 - y_2 = 0$

$\iff x_1 = x_2$ ve $y_1 = y_2$

$\iff (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$

4- $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

$x = (x_1, y_1) \quad y = (x_2, y_2) \quad z = (x_3, y_3)$

$$|x_1 - x_3| + |y_1 - y_3| \overset{?}{\leq} (|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|) + (|x_2 - x_3| + |y_2 - y_3|)$$

$$|x_1 - x_3| + |y_1 - y_3| = |x_1 - x_3 + x_2 - x_2| + |y_1 - y_3 + y_2 - y_2|$$

$$= |\underbrace{x_1 - x_2}_{a} + \underbrace{x_2 - x_3}_{b}| + |\underbrace{y_1 - y_2}_{a} + \underbrace{y_2 - y_3}_{b}|$$

$|a+b| \leq |a| + |b|$ gibi düşünürsek,

$$\leq |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + |y_1 - y_2| + |y_2 - y_3|$$

$$= |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |x_2 - x_3| + |y_2 - y_3|$$

$$= d(x,y) + d(y,z)$$

Yuvarını çizersek, $B((0,0),1)$ ve $S((0,0),1)$ kümelerini çizersek.

$B((0,0),1) \Rightarrow (0,0)$ merkezli $r=1$ yarıçaplı çemberdir.

$B(x,r) = \{ y \mid d(x,y) < r \}$

$B((0,0),1) = \{ (x,y) \mid d(x,y) = (0,0) < 1 \} = \{ (x,y) \mid |x-0| + |y-0| < 1 \}$

$= \{ (x,y) \mid |x| + |y| < 1 \}$

$|x| + |y| < 1 \qquad |x| + |y| = 1$

i- $x > 0, y > 0, \quad x + y = 1 \quad y = 1 - x \quad \left.\begin{matrix} x=0, y=1 \\ y=0, x=1 \end{matrix}\right\}$

ii- $x > 0, y < 0,$

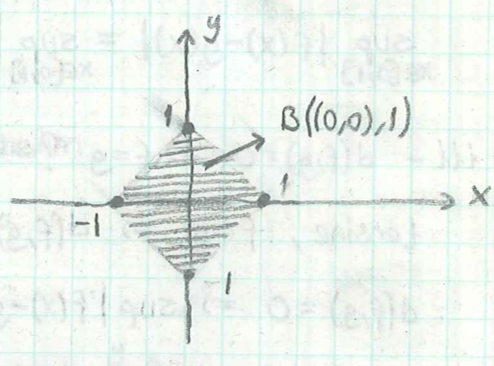
$x - y = 1 \Rightarrow y = x - 1 \quad \left.\begin{matrix} x=0, y=-1 \\ y=0, x=1 \end{matrix}\right\}$

iii- $x < 0, y > 0$

$-x + y = 1 \Rightarrow y = x + 1 \quad \left.\begin{matrix} x=0, y=1 \\ y=0, x=-1 \end{matrix}\right\}$

iv- $x < 0, y < 0$

$-x - y = 1 \Rightarrow y = -x - 1 \quad \left.\begin{matrix} x=0, y=-1 \\ y=0, x=-1 \end{matrix}\right\}$



8/S.2 — $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$

$x = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$

$y = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \qquad d(x,y) = |x_1| + |x_2| + |y_1| + |y_2|$

fonksiyonu metrik midir?

i- $d(x,y) \geqslant 0$

ii- $d(x,y)=0 \iff x=y$

$x=y=(-1,2)$

$d(x,y)=0$? $\quad d(x,y)=d((-1,2),(-1,2))$

$= |-1|+|-1|+|2|+|2| = 1+1+2+2=6 \neq 0$

O halde, metrik özelliğini sağlamadığından, metrik değildir denir.

9/ S-3- $C([0,1],\mathbb{R})$ ile $[0,1]$ kapalı aralığında tanımlı reel değerli ve sürekli fonksiyonların kümesini gösterelim.

Bir d fonksiyonu, $f,g \in C([0,1],\mathbb{R})$ olmak üzere,

$d(f,g)=\sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)-g(x)|$ şeklinde tanımlansın. C fonksiyonunun

$C([0,1],\mathbb{R})$ metrik midir?

$r>0$ $r\in\mathbb{R}$ ve $f_0 \in C([0,1],\mathbb{R})$ olmak üzere

$B(f_0,r)$, $B[f_0,r]$, $S(f_0,r)$ kümelerini çiziniz. (C sürekli)

(Artık, nokta yerine fonksiyonlarla işlem yapıyoruz.)

i- $\forall f,g \in C([0,1],\mathbb{R})$, $d(f,g)\geqslant 0$?

$\underbrace{\sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)-g(x)|}_{\text{artık bir sayı oldu.}} \geqslant 0$ (Mutlak değerin özelliğinden)

ii- $d(f,g)=d(g,f)$

$\sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)-g(x)| = \sup\limits_{x\in[0,1]} \left|(-1)(g(x)-f(x))\right| = \sup\limits_{x\in[0,1]} |g(x)-f(x)| = d(g,f)$

iii- $d(f,g)=0 \Rightarrow f=g$?

tersine, $f=g \Rightarrow d(f,g)=0$

$d(f,g)=0 \Rightarrow \sup |f(x)-g(x)|=0$

$\Rightarrow |f(x)-g(x)| \leqslant \sup|f(x)-g(x)|=0$

Not// Herhangi bir A kümesinin sup'u a ise,

(sup A = a ⇒ her zaman.)

⇒ $\forall x\in A$ için $x\leqslant a$ dır. veya $x \leqslant \sup A$ dır.

$\Rightarrow |f(x)-g(x)|=0 \Rightarrow f(x)-g(x)=0$

$\Rightarrow f(x)=g(x) \quad \forall x \in [0,1]$

$\Rightarrow f=g \Rightarrow f(x)-g(x)=0 \Rightarrow |f(x)-g(x)|=0$

Her x için doğru olduğundan sup için de doğru olur.

$\sup |f(x)-g(x)|=0$

iv - $\forall f,g,h \in C([0,1],\mathbb{R})$

$d(f,g) \leq d(f,h)+d(h,g)$?

$\sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)-g(x)| \leq \sup|f(x)-h(x)| + \sup|h(x)-g(x)|$?

$|f(x)-g(x)| = |f(x)-g(x)+h(x)-h(x)|$

$= |\underbrace{f(x)-h(x)}_{a}+\underbrace{h(x)-g(x)}_{b}| \leq |f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)|$

$|f(x)-g(x)| \leq |f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)|$

$\Rightarrow \sup|f(x)-g(x)| \leq \sup|f(x)-h(x)|+\sup|h(x)-g(x)|$

$\Rightarrow \sup\limits_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)| \leq \sup\limits_{x\in[0,1]}|f(x)-h(x)| + \sup\limits_{x\in[0,1]}|h(x)-g(x)|$

$\Rightarrow d(f,g) \leq d(f,h)+d(h,g)$

Not// $\left.\begin{array}{l} f(x) \leq g(x) \Rightarrow \sup f(x) \leq \sup g(x) \\ \sup(f(x)+g(x)) \leq \sup f(x) + \sup g(x) \end{array}\right\}$ olur.

- $r>0$, $f_0 \in C([0,1],\mathbb{R})$

$B(f_0,r)$, $B[f_0,r]$, $S(f_0,r)$ bulalım ve çizelim.

$B(f_0,r) = \{f \mid d(f,f_0)<r\}$

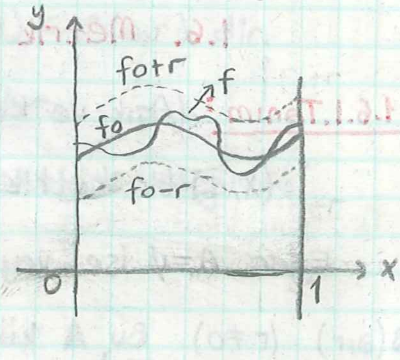
$= \{f \mid \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)-f_0(x)|<r\}$

$\sup|f(x)-f_0(x)|<r$

$|f(x)-f_0(x)| \leq \sup|f(x)-f_0(x)|<r$

$\Rightarrow |f(x)-f_0(x)|<r \Rightarrow -r < f(x)-f_0(x) < r$

$\Rightarrow f_0(x)-r < f(x) < f_0(x)+r$



$\Rightarrow |f(x)-g(x)| = 0 \Rightarrow f(x)-g(x)=0$

$\Rightarrow f(x)=g(x) \quad \forall x \in [0,1]$

$\Rightarrow f=g \Rightarrow f(x)-g(x)=0 \Rightarrow |f(x)-g(x)|=0$

Her x için doğru olduğundan sup için de doğru olur.

$\sup |f(x)-g(x)| = 0$

iv- $\forall f,g,h \in C([0,1],\mathbb{R})$

$d(f,g) \leq d(f,h)+d(h,g)$?

$\sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)-g(x)| \leq \sup |f(x)-h(x)| + \sup |h(x)-g(x)|$?

$|f(x)-g(x)| = |f(x)-g(x)+h(x)-h(x)|$

$= |\underbrace{f(x)-h(x)}_{a} + \underbrace{h(x)-g(x)}_{b}| \leq |f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)|$

$|f(x)-g(x)| \leq |f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)|$

$\Rightarrow \sup|f(x)-g(x)| \leq \sup|f(x)-h(x)| + \sup|h(x)-g(x)|$

$\Rightarrow \sup\limits_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)| \leq \sup\limits_{x\in[0,1]}|f(x)-h(x)| + \sup\limits_{x\in[0,1]}|h(x)-g(x)|$

$\Rightarrow \quad d(f,g) \leq d(f,h)+d(h,g)$

Not// $\left.\begin{array}{l} f(x) \leq g(x) \Rightarrow \sup f(x) \leq \sup g(x) \\ \sup(f(x)+g(x)) \leq \sup f(x) + \sup g(x) \end{array}\right\}$ olur.

- $r>0$, $f_0 \in C([0,1],\mathbb{R})$

$B(f_0,r)$, $B[f_0,r]$, $S(f_0,r)$ bulalım ve çizelim.

$B(f_0,r) = \{ f \mid d(f,f_0) < r \}$

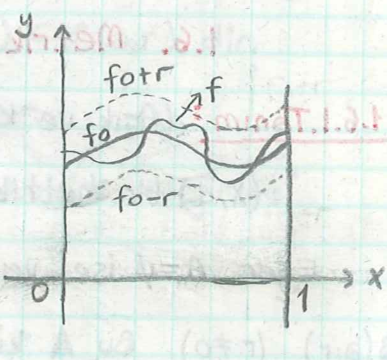
$= \{ f \mid \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)-f_0(x)| < r \}$

$\sup|f(x)-f_0(x)| < r$

$|f(x)-f_0(x)| \leq \sup|f(x)-f_0(x)| < r$

$\Rightarrow |f(x)-f_0(x)| < r \Rightarrow -r < f(x)-f_0(x) < r$

$\Rightarrow f_0(x)-r < f(x) < f_0(x)+r$



11/S.4- a) Bir X kümesi ve onun üzerinde bir d basit metriği veriliyor.

Eğer $P \in X$ ve $A, B \subset X$ ise $d(P,A)$ ve $d(A,B)$ yi bulunuz.

b) $\mathbb{R}$ üzerinde d' mutlak değer metriğini koyalım.

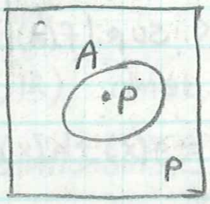
$A=[0,1]$ $B=[1,2]$ olduğuna göre $d'(A,B)$ yi bulunuz.

Eğer d, $\mathbb{R}$ üzerinde basit metrikse $d(A,B)$ yi bulunuz.

Çözüm// a) $d(P,A) = \inf\limits_{x \in A} d(P,x)$ (S.5 ve Tanım 1.5.2 den dolayı)

Not// d basit metrik ise,

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x=y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$



i- $P \in A$ ii- $P \notin A$

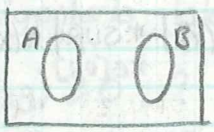
i) Eğer P noktası A'nın içindeyse, P ile A noktaları çakışacağından

$$d(P,A) = \inf d(P,x) = 0$$

ii) $d(P,A) = \inf\limits_{x \in A} d(P,x) = 1$

b) $d(A,B) = \inf d(x,y)$

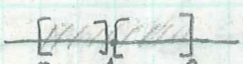
$x \in A$ $y \in B$



i. durum// $A \cap B = \emptyset$ olacağından, A ve B nin noktaları hiçbir zaman çakışmayacağından,

$$d'(A,B) = \inf d(x,y) = 1$$

ii. durum// $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow d(A,B) = \inf d(x,y) = 0$ $x \in A$ $y \in B$



$d(A,B) = \inf\limits_{\substack{x \in A \\ y \in B}} d(x,y) = 1$ $A \cap B = \emptyset$

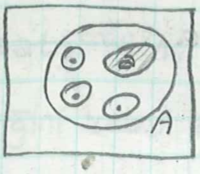
$d'(A,B) = \inf\limits_{\substack{x \in A \\ y \in B}} d(x,y) = \inf\limits_{\substack{x \in A \\ y \in B}} |x-y| = 0$

1.6. Metrik Uzayın Topolojisi

1.6.1. Tanım: (Açık ve Kapalı Kümeler)

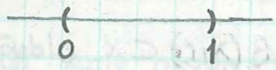
(X,d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun.

Eğer $A = \emptyset$ ise veya her $a \in A$ için $B(a,r) \subset A$ olacak şekilde bir $B(a,r)$ $(r \neq 0)$ açık yuvarı varsa) Bu A kümesine X'in bir açık alt kümesi denir.



(X,d)

Örnek// $\mathbb{R}$, $d(x,y)=|x-y|$ $(0,1)$ açık aralığı açık kümedir. ?

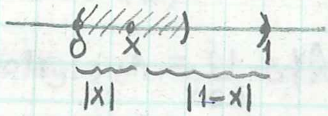


$B(a,r)=\{x\in X \mid d(a,x)<r\}$ (X,d)

$= \{x\in X \mid |a-x|<r\}$

$\Rightarrow a-r<x<a+r$

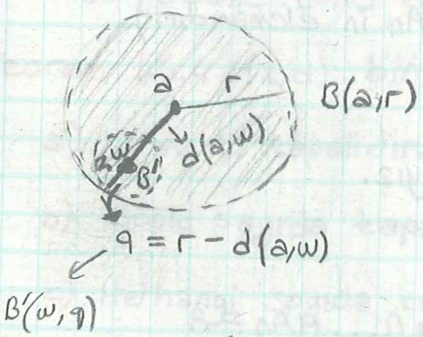
$r=\min(|1-x|,|x|)$



O halde $(0,1)$ açık aralığı bir açık kümedir.

Teorem 1.6.1. (X,d) bir metrik uzay ve $r>0$ olsun. Bu zaman her $a\in X$ için $B(a,r)$ açık yuvarı, bir açık kümedir.

İspat// $B(a,r)=\{x\in X \mid d(a,x)<r\}$



$\forall w\in B(a,r)$ alalım.

$\Rightarrow d(w,z)<q=r-d(a,w)$

$B(w,q)\subset B(a,r)$ olurmu bakalım.

$q=r-d(a,w)$

$\forall z\in B(w,q)$ olsun.

$z\in B(a,r)$ olduğunu göstereceğiz.

$d(a,z)\leq d(a,w)+d(w,z)$ // w merkezli açık yuvarın yarıçapı q dur.

$< d(a,w)+q$

$\leq \cancel{d(a,w)}+r-\cancel{d(a,w)} \Rightarrow d(a,z)<r \Rightarrow z\in B(a,r)$

$\Rightarrow B(w,q)\subset B(a,r)$ dir.

Not:

Uyarı // O halde her açık yuvar bir açık küme olur.

* **Teorem 1.6.2.** (X,d) bir metrik uzay olsun. Bu taktirde aşağıdaki özellikler vardır.

a) X, $\emptyset$ açıktırlar.

b) Sonlu sayıda açık kümelerin arakesiti yine açıktır.

c) Herhangi sayıda açık kümelerin birleşimi yine açıktır.

İspat a// ϕ, X açıktır ?

$\forall a \in X$ her $r>0$ için

$B(a,r) \subset X$ Her $x \in X$ ve $r>0$ reel sayısı için $B(x,r) \subset X$ olduğundan

X açıktır. ϕ ise kabulümüzden dolayı bir açık kümedir.

b// $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n tane açık küme olsun.

$A = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$

$\forall z \in A$ alalım. $z \in A_1, z \in A_2, \ldots, z \in A_n$

$z \in A_1$ olduğundan öyle bir $\exists r_1 > 0$ sayısı vardır ki, $B(z, r_1) \subset A_1$

$z \in A_2$ olduğundan öyle bir $\exists r_2 > 0$ sayısı vardır ki, $B(z, r_2) \subset A_2$

$\vdots$

$z \in A_n$ olduğundan öyle bir $\exists r_n > 0$ sayısı vardır ki, $B(z, r_n) \subset A_n$

($B(z, r_n)$: merkezi z, yarıçapı r_n olan bir yuvar A_n in elemanıdır.)

$r = \min\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$ olsun.

Elde edilen bu yuvarların en küçüğünü bulmalıyız.

$$\left.\begin{array}{l} B(z,r) \subset B(z,r_1) \subset A_1 \\ B(z,r) \subset B(z,r_2) \subset A_2 \\ \vdots \\ B(z,r) \subset B(z,r_n) \subset A_n \end{array}\right\} \Rightarrow B(z,r) \subset A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = A$$

O halde bu arakesit (A) açıktır.

c// $(A_i)_{i \in I}$ X'deki açıkların bir ailesi olsun.

$A = \bigcup_{i \in I} A_i$ A'da açıktır. ?

$\Rightarrow \exists i_0 \in I$ vardır ki, $x \in A_{i_0}$

A_{i_0} açık olduğundan $\exists r > 0 : B(x,r) \subset A_{i_0} \subset A$ olur.

O. halde A kümesi açıktır.

Teorem 1.6.3. (X,d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. A'nın açık olması için gerekli ve yeterli koşul, X'deki bazı açık yuvarların birleşimi olarak yazılabilmesidir.

İspat $\Leftarrow$ // : A'nın bir takım açık yuvarların birleşimi olarak yazılabildiğini kabul edelim. Her açık yuvar açık ve A herhangi sayıda açıkların birleşimi olacağından 1.6.1 ve 1.6.2. teoremlerinden dolayı A kümesi de açık olur.

$\Rightarrow$: A açık olsun. $\forall x \in A$ için $\exists r_x > 0$, $B(x,r_x) \subset A$

$\bigcup_{x\in A} B(x,r_x) \subset A$ ---- (1)

$\bigcup_{x\in A} B(x,r_x) \supset A$ ---- (2)

(1) ve (2) den dolayı, $A = \bigcup_{x\in A} B(x,r_x)$ olur.

Tanım 1.6.2 : (X,d) bir metrik uzay ve $F \subset X$ olsun.
Eğer F kümesinin X'deki tümleyeni açıksa F'ye kapalıdır denir.

Örnek // $\mathbb{R} - [a,b] = \underbrace{(-\infty,a) \cup (b,+\infty)}_{\text{açık}}$

$F = [a,b]$

Bu nedenle $[a,b]$ kapalı aralığı kapalı bir kümedir.

Teorem 1.6.4. (X,d) bir metrik uzay olsun. Bu taktirde

a) X ve $\emptyset$ kapalıdır.

b) Sonlu sayıda kapalı kümelerin birleşimi kapalıdır.

c) Herhangi sayıda kapalı kümelerin arakesiti yine kapalıdır.

İspat // a- $\emptyset$ açık $\Rightarrow X - \emptyset = X$ kapalıdır.

Teorem 1.6.2 den dolayı, X açık $\Rightarrow X - X = \emptyset$ kapalıdır.

b- $F_1, F_2, ..., F_n$ n tane kapalı küme olsun.

$F = F_1 \cup F_2 \cup ... \cup F_n = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$ de kapalıdır. ?

$X - F = X - \bigcup_{i=1}^{n} F_i = \bigcap_{i=1}^{n} [X - F_i]$ (De Morgan Formülü kullanarak)

$\Rightarrow X - F$ açıktır $\Rightarrow F$ kapalıdır.

c- $(F_i)_{i\in I}$, X'in herhangi bir sayıda kapalılar ailesi olsun.

$F = \bigcap_{i\in I} F_i$ 'nin kapalı olduğunu göstermeliyiz.

$X - F = X - \bigcap_{i\in I} F_i = \bigcup_{i\in I} (X - F_i)$ açık ise

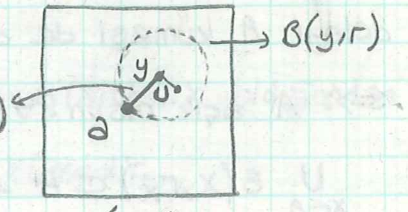
tümleyeni olan F kümesi kapalıdır.

Teorem 1.6.5. (X,d) bir metrik uzay ve $a \in X$ olsun.

$\{a\}$ tek nokta kümesi, X'in kapalı bir alt kümesidir.

İspat// $X-\{a\}$'nın açık olmasını gösterelim.

$\forall y \in X-\{a\}$ alalım.



(X,d)

$r = d(a,y)$

$B(y,r) \subset X-\{a\}$

$\forall u \in B(y,r)$ alalım. $\Rightarrow d(u,y) < r$ dir.

$X-\{a\}$ açıksa tümleyeni olan $\{a\}$ da kapalıdır. //

★★ Bir metrik uzayda her tek nokta kümesi kapalıdır.

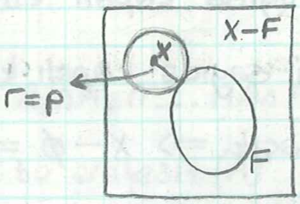
Örneğin; $\{4\}$ kapalıdır. $\{6\}$ kapalıdır.

$\{4\} \cup \{6\} = \{4,6\}$ da kapalıdır.

Teorem 1.6.6. (X,d) bir metrik uzay $F \subset X$ olsun. F alt kümesinin kapalı olması için gerekli ve yeterli koşul $\Leftrightarrow$ her $x \in X-F$ için $d(x,F) \neq 0$ olmasıdır.

(uzaklık sıfırdan farklı olmalıdır.)

İspat// Kabul edelim ki, F kapalı olsun.



(X,d)

$\Rightarrow$: $X-F$ açıktır.

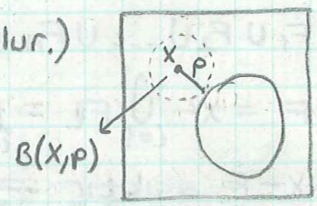
$\Rightarrow x \in X-F$

$\Rightarrow \exists p > 0, : B(x,p) \subset X-F$

$d(x,F) > p > 0 \Rightarrow d(x,F) \neq 0$

$\Leftarrow$: $d(x,F) \neq 0 \Rightarrow X$ kapalıdır. ($X-F$ açık olur.)

$\forall x \in X-F$, $B(x,p) \subset X-F$ açık ise



(X,d)

X kapalıdır. //

1.7. Dizilerin Yakınsaklığı

1.7. Tanım: (X,d) bir metrik uzay $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de bu uzayda bir dizi olsun. Ve yine $y \in X$ verilsin. Eğer her $r > 0$ pozitif sayısına karşılık, $\forall n > n_0$ olduğunda $s_n \in B(y,r)$ olacak şekilde bir

$n_0 \in \mathbb{N}$ varsa, bu $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi y'ye yakınsıyor denir.

$S_n \to y$ ile gösterilir.

Herhangi bir merkezi y, yarıçapı r olan yuvar verildiğinde $1,2,3,\dots,n_0$'a kadar olan tüm sayılar yuvar dışında, n_0'dan sonraki sonsuz elemanlar yuvarın içinde olur.

Yani yuvarın dışında sonlu, içinde sonsuz tane eleman vardır.

24.10.94
P.tesi.

(n_0 tane dışarda
sonsuz tane içinde)
$(S_1, S_2, \dots, S_n$ dışarda$)$

(X,d)

Örnek// $\mathbb{R}^2$, $x=(x_1,y_1)$, $y=(x_2,y_2)$ olmak üzere

$$d(x,y)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \quad (\mathbb{R}^2,d) \text{ metriktir.}$$

$S_n=\left(1,\frac{1}{n}\right)$ dizisini alalım. $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$S_n \to (1,0)$? Bu dizi apsisi 1, ordinatı 0 olan noktaya yakınsar. Bunu göstermeliyiz.

$\forall r>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N} : \forall n>n_0$ için $d(S_n,(1,0))<r$ olmalıdır.

($\mathbb{R}^2$ nin her elemanı ikili olduğu için, dizinin her elemanı ikilidir.)

$$d(S_n,(1,0))=\sqrt{(1-1)^2+\left(0-\frac{1}{n}\right)^2}=\frac{1}{n}$$

$n_0\in\mathbb{N}$ sayısını $n_0>\frac{1}{r}$ olacak şekilde seçelim.

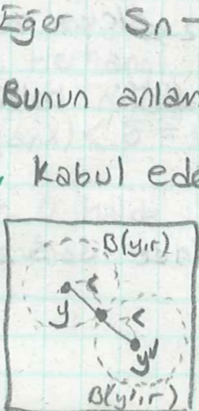
$n>n_0>\frac{1}{r}$ olur. $\Rightarrow n>\frac{1}{r} \Rightarrow \frac{1}{n}<r$

O halde $S_n \to (1,0)$ //

Teorem 1.7.1. (X,d) bir metrik uzay, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de bu uzayda verilen bir dizi olsun. Eğer $S_n\to y$ ve $S_n\to y'$ ise $y=y'$ olur.

Bunun anlamı bir metrik uzayda bir dizi ancak bir noktaya yakınsar.

İspat// Kabul edelim ki $y\neq y'$ olsun.



$r=\frac{1}{2}d(y,y') \Rightarrow 2r=d(y,y')$. İddia ediyoruz ki,

$B(y,r)\cap B(y',r)=\emptyset$ olur. Gösterelim.

Eğer bu arakesit $\emptyset$ den farklı olsaydı $(B(y,r) \cap B(y',r) \neq \emptyset)$

$\exists w \in B(y,r) \cap B(y',r)$ bulunurdu.

$\Rightarrow w \in B(y,r) \Rightarrow d(w,y) = d(y,w) < r$

$w \in B(y',r) \Rightarrow d(w,y') = d(y',w) < r$

Üçgen eşitsizliğini kullanarak,

$2r = d(y,y') \leq \underbrace{d(y,w)}_{<r} + \underbrace{d(w,y')}_{<r}$ yazabiliriz.

$2r < 2r$ çelişkidir.

O halde bu arakesit $\emptyset$ dir. Fakat ispat tamamlanmadı.

S_n nin dışında sonlu, içinde sonsuz tane elemanı vardır.

$$\left.\begin{array}{l} S_n \to y \Rightarrow B(y,r) \\ S_n \to y' \Rightarrow B(y',r) \end{array}\right\}$$ $y = y'$ olur. Bu çelişkiyi ortadan kaldırmak için, bu eşitlik olmalıdır.

Teorem 1.7.2. (X,d) bir metrik uzay, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de bu uzayda bir dizi olsun. (S_n) dizisinin bir $y \in X$ elemanına yakınsaması için gerekli ve yeterli koşul, y'yi içeren her açık kümenin, dizinin belki sonlu tane elemanı hariç bütün elemanlarını içermesidir.

İspat// $\Rightarrow$: Kabul edelim ki, $S_n \to y$ olsun. U'da y'yi içeren bir açık küme olsun.

U açık olduğundan $B(y,r) \subset U$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı vardır. (Açık küme tanımından dolayı)

S_n dizisi $\to y$ ise $B(y,r)$ yuvarında, diziye ait dışında sonlu, içinde sonsuz eleman, U nun içinde olduğu için sonsuz eleman vardır.

$\Leftarrow$: Kabul edelim ki, y'yi içeren her açık kümenin, dizinin belki sonlu tane elemanı hariç bütün elemanlarını içersin.

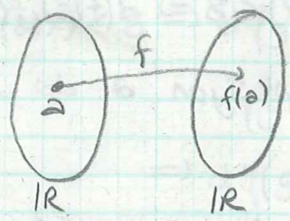
$\forall r > 0$ verildiğinde, $B(y,r)$ açık yuvarını alalım. İçinde sonsuz dışında sonlu eleman olduğunu gösterelim.

$B(y,r)$ de bir açık kümedir. O halde $S_n \to y$ dir.

1.8. Süreklilik

1.8.1. Tanım : $\mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$ ☆(Analiz'deki tanım)

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ (tanım kümesine ait bir nokta.)



$\forall \varepsilon > 0$, $|a-x| < \delta \Rightarrow |f(a) - f(x)| < \varepsilon$

olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı varsa,

f'ye $x=a$ noktasında süreklidir denir.

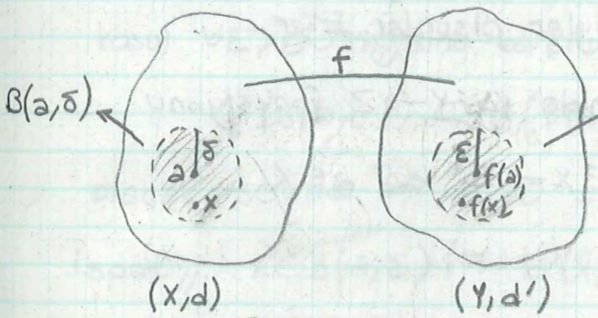
1.8.2. Tanım : (X,d) ve (Y,d') iki metrik uzay ve $a \in X$ olsun.

$f: X \to Y$ verilsin. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık

$d(a,x) < \delta$ olduğunda $(x \in X)$ $d'(f(a),f(x)) < \varepsilon$ olacak şekilde bir

$\delta > 0$ sayısı varsa, f fonksiyonuna a noktasında süreklidir denir.

☆ (Topoloji'deki tanım)



$B(f(a),\varepsilon)$

$d(a,x) < \delta \Rightarrow d(f(a),f(x)) < \varepsilon$

$\Rightarrow$ f'ye a noktasında

süreklidir denir.

(Eğer f, X'in her noktasında sürekli ise f'ye X kümesinde

süreklidir veya kısaca süreklidir denir.)

Teorem 1.8.1. (X,d), (Y,d') iki metrik uzay ve $f: X \to Y$ sabit bir

fonksiyon ise f süreklidir.

$$\left.\begin{array}{l} X \xrightarrow{f} Y \\ x \longrightarrow f(x) = c \end{array}\right\} \Rightarrow \text{sabit fonksiyondur.}$$

İspat // Herhangi bir $a \in X$ noktası ve $\varepsilon > 0$ reel sayısı verilsin.

$d(a,x) < \delta = 1$ olduğunda $d'(f(a),f(x)) = d'(c,c) = 0 < \varepsilon$

olur. O halde f süreklidir.

Teorem 1.8.2. (X,d) bir metrik uzay ve $I : X \to X$ bir birim fonksiyonsa I süreklidir.

İspat// $\forall a \in X$, $\forall \varepsilon > 0$ sayısı verilsin. Kabul edelim ki,

$\delta = \varepsilon$ olsun. $d(a,x) < \delta$ olsun.

$\big((X,d),(Y,d')$ $\quad f: X \to Y$ $\quad a \in X$, $\forall \varepsilon > 0$, $d(a,x) < \delta \Rightarrow d(f(a),f(x)) < \varepsilon \big)$

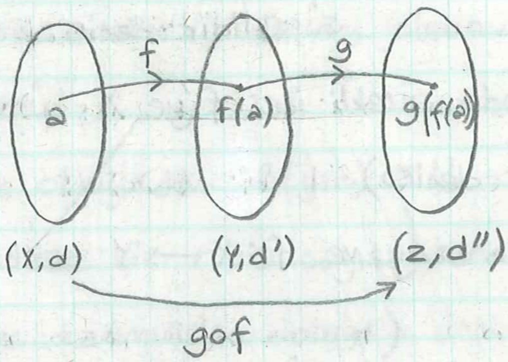
$d'(\underset{a}{\underset{\|}{I(a)}}, \underset{x}{\underset{\|}{I(x)}}) = d(a,x) < \delta = \varepsilon$ $\Rightarrow$ bu fonksiyon a da süreklidir.

Tüm tanım kümesinde de süreklidir.

Uyarma : (X,d), (Y,d') bir metrik uzay ve f de X kümesinden Y'ye bir fonksiyonsa bunu $f: X \to Y$ ile göstereceğiz. Eğer (X,d), (X,d') iki metrik uzay ve f'de (X,d) den (X,d') uzayına giden bir fonksiyonsa $f: X \to X$ simgesi kullanılmaz. Aksi halde fonksiyonun tanım ve değer kümelerinin hangi metrik uzay olduğu belirlenemez. $f: (X,d) \to (X,d')$ kullanılmalıdır.

Teorem 1.8.3. (X,d), (Y,d'), (Z,d'') metrik uzaylar olsunlar. Eğer

$f: X \to Y$ fonksiyonu $a \in X$ noktasında $g: Y \to Z$ fonksiyonu $f(a) \in Y$ noktasında sürekli iseler $g \circ f : X \to Z$ de $a \in X$ noktasında süreklidir.



$\forall \varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde $x \in X$,

$d(x,a) < \delta \Rightarrow d''(g\circ f(x), g\circ f(a)) < \varepsilon$ $\quad \big[d''(g(f(x)), g(f(a)) < \varepsilon \big]$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulacağız.

İspat// g, $f(a) \in Y$ noktasında sürekli olduğundan $\forall \varepsilon > 0$;

$y \in Y$, $d'(y, f(a)) < \eta$ olduğunda $d''(\underset{g(f(x))}{g(y)}, g(f(a))) < \varepsilon$

olacak şekilde bir $\eta > 0$ sayısı vardır.

f'de $a \in X$ noktasında sürekli $\Rightarrow$ $\eta > 0$ (eta) sayısına karşılık $x \in X$ $d(x,a) < \delta$ olduğunda $d'(f(x), f(a)) < \eta$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır.

Yani $\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde $x \in X$,

$$d(a,x) < \delta \Rightarrow d''(\underbrace{g(f(x))}_{(g\circ f)(x)}, \underbrace{g(f(a))}_{(g\circ f)(a)}) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow d''((g\circ f)(x), (g\circ f)(a)) < \varepsilon \text{ olur.}$$

Sonuç 1.8.4. $(X,d), (Y,d'), (Z,d'')$ metrik uzaylar olsunlar. Eğer $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ sürekli fonksiyon iseler bu taktirde $g\circ f: X \to Z$ bileşke fonksiyonu da süreklidir.

Teorem 1.8.5. $f: (X,d) \longrightarrow (Y,d')$ fonksiyonu verilsin. f'nin bir $a \in X$ noktasında sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık

$$f(B(a,\delta)) \subset B(f(a), \varepsilon)$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunmasıdır.

İspat// $x \in B(a,\delta) \Leftrightarrow d(x,a) < \delta$ $\qquad B(a,\delta) = \{x \in X \mid d(x,a) < \delta\}$

$y \in B(f(a), \varepsilon) \Leftrightarrow d'(f(a), y) < \varepsilon$ $\qquad B(f(a),\varepsilon) = \{x \in X \mid d(f(x), f(a)) < \varepsilon\}$

f; a'da sürekli $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde $d(a,x) < \delta$ $((x \in B(a,\delta))$ olduğunda $d'(f(a), f(x)) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır.

$x \in B(a,\delta) \Rightarrow f(x) \in B(f(a), \varepsilon)$

Teorem 1.8.6. Bir $f: (X,d) \to (Y,d')$ fonksiyonunun $a \in X$ noktasında sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul, verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $B(a,\delta) \subset f^{-1}(B(f(a), \varepsilon)$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısının bulunmasıdır.

$$f^{-1}(f(B(a,\delta)) \subset f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$$

$$\Rightarrow B(a,\delta) \subset f^{-1}(B(f(a), \varepsilon)$$

f'de $a \in X$ noktasında sürekli $\Rightarrow$ $\eta > 0$ (eta) sayısına karşılık $x \in X$ $d(x,a) < \delta$ olduğunda $d'(f(x), f(a)) < \eta$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır.

Yani $\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde $x \in X$,

$$d(a,x) < \delta \Rightarrow d''(\underbrace{g(f(x))}_{(g\circ f)(x)}, \underbrace{g(f(a))}_{(g\circ f)(a)}) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow d''((g\circ f)(x), (g\circ f)(a)) < \varepsilon \text{ olur.}$$

Sonuç 1.8.4. $(X,d), (Y,d'), (Z,d'')$ metrik uzaylar olsunlar. Eğer $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ sürekli fonksiyon iseler bu taktirde $g\circ f: X \to Z$ bileşke fonksiyonu da süreklidir.

Teorem 1.8.5. $f: (X,d) \longrightarrow (Y,d')$ fonksiyonu verilsin. f'nin bir $a \in X$ noktasında sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık

$$f(B(a,\delta)) \subset B(f(a), \varepsilon)$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunmasıdır.

İspat// $x \in B(a,\delta) \Leftrightarrow d(x,a) < \delta$ $\quad B(a,\delta) = \{x \in X \mid d(x,a) < \delta\}$

$y \in B(f(a), \varepsilon) \Leftrightarrow d'(f(a), y) < \varepsilon$ $\quad B(f(a),\varepsilon) = \{x \in X \mid d(f(x), f(a)) < \varepsilon\}$

f; a'da sürekli $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde $d(a,x) < \delta$ $((x \in B(a,\delta))$ olduğunda $d'(f(a), f(x)) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır.

$x \in B(a,\delta) \Rightarrow f(x) \in B(f(a), \varepsilon)$

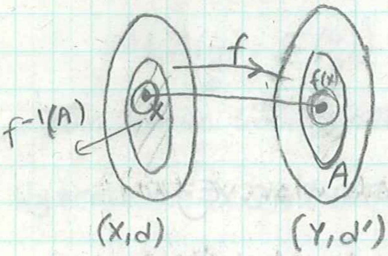
Teorem 1.8.6. Bir $f: (X,d) \to (Y,d')$ fonksiyonunun $a \in X$ noktasında sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul, verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $B(a,\delta) \subset f^{-1}(B(f(a), \varepsilon)$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısının bulunmasıdır.

$$f^{-1}(f(B(a,\delta)) \subset f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$$

$$\Rightarrow B(a,\delta) \subset f^{-1}(B(f(a), \varepsilon)$$

Teorem 1.8.7. (X,d), (Y,d') iki metrik uzay ve $f: X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Bu taktirde f'nin sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul (Y,d') metrik uzayındaki her A açık kümesinin $f^{-1}(A)$ ters görüntüsünün (X,d) de açık olmasıdır. 31.10.1994.

İspat// f'nin sürekli olduğunu kabul edelim.



$\Rightarrow$: $\forall x \in f^{-1}(A)$ alalım.

$x \in f^{-1}(A) \Rightarrow f(x) \in A$

A açık $\Rightarrow B(f(x), p) \subset A$

olacak şekilde bir $p > 0$ sayısı vardır.

(1.8.5). teoremden dolayı $f(B(x,q)) \subset B(f(x),p) \subset A$ olacak şekilde bir $q > 0$ sayısı vardır.

$\Rightarrow B(x,q) \subset f^{-1}(A)$ (ters görüntülerini alarak)

$\Rightarrow f^{-1}(A)$ bir açık kümedir.

$\Leftarrow$: Bu ispat için (1.8.6). teorem kullanılacak.

$\forall a \in X$ alalım. $f(a) \in Y$ olur.

$B(f(a), p)$ açık yuvarını alalım. $B(f(a),p)$ kümesi (Y,d')'de bir açık kümedir.

$\Rightarrow f^{-1}(B(f(a), p))$ de, (X,d)'de açıktır.

$\Rightarrow a \in f^{-1}(B(f(a), p))$

$\Rightarrow B(a,q) \subset f^{-1}(B(f(a),p))$ olacak şekilde bir $q > 0$ sayısı vardır.

(1.8.6). teoremden dolayı f süreklidir.

Teorem 1.8.8. (X,d), (Y,d') iki metrik uzay, $f: X \to Y$ olsun.

f fonksiyonunun sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul, Y'deki her U açık yuvarının $f^{-1}(U)$ ters görüntüsünün de X'de açık olmasıdır.

İspat// $\Rightarrow$: f sürekli olsun. U'da Y'de bir açık yuvar olsun.

$f^{-1}(U)$, X'de açık mıdır? ispatlayalım.

U; Y'de bir açık kümedir. (1.8.7) teoreminden, $f^{-1}(U)$ da X'de bir açık kümedir.

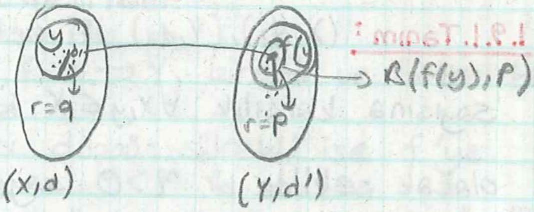
<u>$\Leftarrow$:</u> Kabul edelim ki, (Y,d') deki her U açık yuvarının $f^{-1}(U)$ ters görüntüsü X'de açık olsun. (Y,d')'de herhangi bir V açık alt kümesi alalım. $V=\bigcup\limits_{i\in I} U_i$, $\forall U_i$ bir açık yuvar olarak yazılabilir. (Teorem (1.6.3) den dolayı).

$$f^{-1}(V)=f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} U_i\Big)=\bigcup_{i\in I} f^{-1}(U_i) \text{ yazılır.}$$

Her $i\in I$ için $f^{-1}(U_i)$ kümelerinin X'de açık olduğu verilmiş. O halde $f^{-1}(V)$ de (X,d) metrik uzayının bir açık alt kümesi olur. (1.8.7). teoremden dolayı f süreklidir.

Teorem 1.8.9. (X,d) ve (Y,d') metrik uzayları ile $f:X\to Y$ verilsin. Bu taktirde f'nin bir $y\in X$ noktasında sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul, X'de verilen ve y'ye yakınsayan her $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi için $(f(s_n))$ dizisinin $f(y)$ ye yakınsamasıdır.

İspat// Kabul edelim ki f, $y\in X$ de sürekli olsun. (Fakat gerektirmenin diğer tarafı doğru olmasın.)



Öyle bir $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset X$

$s_n\to y$ olduğunda $(f(s_n))_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $f(y)$'ye yakınsamasın.

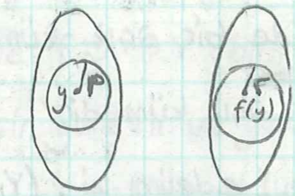
$\Rightarrow$: $\exists p>0$ sayısı dolayısıyla öyle bir $B(f(y),p)$ açık yuvarı vardır ki; yuvarda sonlu, dışında ise $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin sonsuz elemanı bulunurdu. Öte yandan f süreklidir. $\exists q>0$ sayısı vardır ki,

$f(B(y,q))\subset B(f(y),p)$ olur.

Kabulümüzden dolayı $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin belki sonlu tane elemanı hariç hepsi $B(y,q)$ yuvarı içindedir. Bu nedenle de $B(f(y),p)$ içinde $(f(s_n))_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin sonsuz tane elemanı bulunur.

Bu ise çelişkidir. O halde $s_n\to y$ için $f(s_n)\to f(y)$ olur.

Tersine;



$f(B(y,q)) \subset B(f(y),r)$

f sürekli olmasaydı,

$\exists B(f(y),p)$ açık yuvarı vardır ki,

$f(B(y,q)) \subset B(f(y),p)$ olacak

şekilde bir $q>0$ yoktur.

$U_n = B(y, \frac{1}{n}) \quad n \in \mathbb{N}$

$f(U_n) \not\subset B(f(y),p)$

$f(U_1) \not\subset B(f(y),p) \Rightarrow \exists s_1 \in U_1 : f(s_1) \notin B(f(y),p)$

$f(U_2) \not\subset B(f(y),p) \Rightarrow \exists s_2 \in U_2 : f(s_2) \notin B(f(y),p)$

$\vdots$

$f(U_n) \not\subset B(f(y),p) \Rightarrow \exists s_n \in U_n : f(s_n) \notin B(f(y),p)$

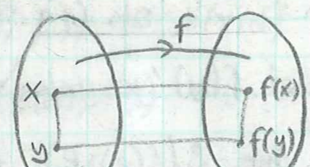
$(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $s_n \to y$ iken,

$(f(s_n))_{n\in\mathbb{N}}$ yuvarın dışındadır. $(f(s_n))_{n\in\mathbb{N}} \not\to f(y)$ olur.

Bu ise kabulümüzle çelişir. O halde f süreklidir.

1.9. Düzgün Süreklilik.

1.9.1. Tanım: (X,d_1), (Y,d_2) iki metrik uzay, $f: X \to Y$ olsun. Eğer her $\varepsilon>0$ sayısına karşılık $\forall x,y \in X$ için $d_1(x,y) \leq \eta$ olduğunda $d_2(f(x),f(y)) \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir $\eta>0$ sayısı varsa f fonksiyonuna <u>düzgün süreklidir</u> denir.



(X,d_1) (Y,d_2)

1.9.2. Tanım: (X,d_1) ve (Y,d_2) iki metrik uzay, $f: X \to Y$ olsun. Eğer verilen herhangi $\varepsilon>0$ sayısına karşılık $A \subset X$ ve $\delta(A) \leq \eta$ olduğunda $\delta(f(A)) \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir $\eta>0$ sayısı varsa f ye <u>düzgün süreklidir</u> denir.

$\delta(A) = \sup_{\substack{x\in A \\ y\in A}} d(x,y)$ $\qquad f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$

Açıklama : η, yalnızca ε a bağlıdır. $\eta(\varepsilon) \rightarrow$ düzgün süreklilikte

Oysa, $\eta(\varepsilon, x)$ süreklilikte ise hem ε, hem verilen noktaya bağlıdır.

Örnek 1 // (X,d) , $I : X \rightarrow X$ birim fonksiyon olsun. I düzgün süreklidir.

$\forall \varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde $\varepsilon = \delta$ seçelim. $\forall x, y \in X$ için

$d(x,y) < \delta$ olsun. $d(\underset{x}{\underbrace{I(x)}}, \underset{y}{\underbrace{I(y)}}) = d(x,y) < \delta = \varepsilon$ olur.

yani I düzgün süreklidir.

Örnek 2 // $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \rightarrow d(x,y) = |x-y|$

$x \rightarrow f(x) = x^2 \qquad \forall \varepsilon > 0,$

Her $\eta > 0$ sayısı için $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ olsun.

$|f(a+\eta) - f(a)| \Rightarrow \quad d(a+\eta, a) = |a+\eta-a| = |\eta| = \eta$

$|f(a+\eta) - f(a)| = |(a+\eta)^2 - a^2| = |a^2 + 2a\eta + \eta^2 - a^2| = 2a\eta + \eta^2 < \varepsilon$

$2a\eta < \underline{2a\eta + \eta^2} < \varepsilon \Rightarrow 2a\eta < \varepsilon \Rightarrow \eta < \dfrac{\varepsilon}{2a}$

O halde f düzgün sürekli değildir.

Uyarı // Her düzgün sürekli fonksiyon süreklidir. Fakat tersi her zaman doğru değildir.

1.10. Düzgünlük İzomorfizmi ve Denk Metrikler

<u>1.10. Tanım :</u> (X,d_1), (Y,d_2) iki metrik uzay, $f : X \rightarrow Y$ birebir ve örten bir fonksiyon olsun. Eğer f ve f^{-1} fonksiyonları düzgün sürekli ise f'ye düzgünlük izomorfizmi, (X,d_1) ve (Y,d_2) metrik uzaylarına da düzgünlük bakımından izomorf metrik uzaylar denir.

<u>1.11. Tanım:</u> d_1 ve d_2, X üzerinde iki metrik olsunlar. Eğer $I : (X,d_1) \longrightarrow (X,d_2)$ birim fonksiyonu ve bunun I^{-1} tersi sürekliyse bu d_1 ve d_2 metriklerine denktirler (eş değerdirler) denir.

$I : X \longrightarrow X$

Uygulama :

1- $\mathbb{R}^2$ de $X = (x_1, y_1)$, $Y = (x_2, y_2)$; $d(x,y) = \max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|)$ metriğini koyalım. $\mathbb{R}^2$ de $S_n = (x_n, y_n)$ olmak üzere S_n dizisi verilmiş olsun. (S_n) dizisinin bir $X_0 = (x,y)$ elemanına yakınsaması için gerekli ve yeterli koşul, $x_n \to x$ ve $y_n \to y$ ya da

$S_n = (x_n, y_n) \to (x, y) \iff x_n \to x$ ve $y_n \to y$

$\Rightarrow$:

Çözüm // kabul edelim ki $(x_n, y_n) \to (x, y)$ olsun.

$\forall \varepsilon > 0$ için $\forall n \geq n_0$ olduğunda

$(x_n, y_n) \in B((x,y), \varepsilon)$ olacak şekilde

$n_0 \in \mathbb{N}$ vardır.

$d(\underbrace{(x_n, y_n)}_{S_n}, \underbrace{(x,y)}_{x_0}) < \varepsilon$ olur.

$= mak(|x_n - x|, |y_n - y|) < \varepsilon$ olur.

$mak(|x_n - x|, |y_n - y|) = |x_n - x|$ olsun

$\Rightarrow |y_n - y| < |x_n - x| < \varepsilon$

$\Rightarrow |y_n - y| < \varepsilon$ olur

$\Rightarrow x_n \to x$ ve $y_n \to y$

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$,

$\forall n \geq n_0$ için $|x_n - x| < \varepsilon$, $|y_n - y| < \varepsilon$ olur.

$x_n \in B(x, \varepsilon)$ $\quad y_n \in B(y, \varepsilon)$

{ (X,d) uzayında $(x_n) \subset X$ dir. $x_n \to x$ olması için $\iff$ $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için $\forall n \geq n_0$ için $x_n \in B(x, \varepsilon)$ o.ş. $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. }

{ (X,d) de, $r > 0$, $B(a,r) = \{x \in X \mid d(a,x) < r\}$ $\forall x \in B(a,r) \Rightarrow d(a,x) < r$ dir. }

{ $mak(a,b) = c \Rightarrow a = c \lor b = c \lor a < c \land b < c$ }

$\Leftarrow$:

Tersine, $x_n \to x$ ve $y_n \to y$ olsun.

$\forall \varepsilon > 0$, $\forall n \geq n_1$ olduğunda $x_n \in B(x, \varepsilon)$ veya $|x_n - x| < \varepsilon$

Aynı $\varepsilon > 0$ için $\forall n \geq n_2$ olduğunda $y_n \in B(y, \varepsilon)$ veya $|y_n - y| < \varepsilon$

$n_0 = mak(n_1, n_2)$ denirse aynı $\varepsilon > 0$ için $\forall n \geq n_0$ olduğunda

$mak(|x_n - x|, |y_n - y|) < \varepsilon$ olur. O halde

$(x_n, y_n) \to (x, y)$ olur. //

2- (X,d) bir metrik uzay, (Y, d_Y) de alt uzayı olsun.

$(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de, (Y, d_Y) de bir dizi olsun.

a) Eğer (S_n) dizisi (Y, d_Y) alt metrik uzayında bir $y \in Y$ noktasına yakınsıyorsa, bu dizinin (X,d) metrik uzayında da aynı y noktasına yakınsayacağını gösterin.

b) (Y, d_Y) de bir limit noktası olmayan fakat (X,d) de bu uzayın bir elemanına yakınsayan bir $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin varlığını gösterin.

gerekli ve yeterli koşul, $x_n \to x$ ve $y_n \to y$ ya da

$s_n = (x_n, y_n) \to (x, y) \Leftrightarrow x_n \to x$ ve $y_n \to y$

Çözüm // $\Rightarrow$: kabul edelim ki $(x_n, y_n) \to (x, y)$ olsun.

$\forall \varepsilon > 0$ için $\forall n \geq n_0$ olduğunda

$(x_n, y_n) \in B((x,y), \varepsilon)$ olacak şekilde

$n_0 \in \mathbb{N}$ vardır.

$d(\underbrace{(x_n, y_n)}_{s_n}, \underbrace{(x, y)}_{x_0}) < \varepsilon$ olur.

$= mak(|x_n - x|, |y_n - y|) < \varepsilon$ olur.

$mak(|x_n - x|, |y_n - y|) = |x_n - x|$ olsun

$\Rightarrow |y_n - y| < |x_n - x| < \varepsilon$

$\Rightarrow |y_n - y| < \varepsilon$ olur

$\Rightarrow x_n \to x$ ve $y_n \to y$

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$,

$\forall n \geq n_0$ için $|x_n - x| < \varepsilon$, $|y_n - y| < \varepsilon$ olur.

$x_n \in B(x, \varepsilon)$ $\quad y_n \in B(y, \varepsilon)$

{(x, d) uzayında $(x_n) \subset X$ dir. $x_n \to x$ olması için $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için $\forall n \geq n_0$ için $x_n \in B(x, \varepsilon)$ o.ş. $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır.}

{(X, d) de, $r > 0$, $B(a, r) = \{x \in X \mid d(a, x) < r\}$ $\forall x \in B(a, r) \Rightarrow d(a, x) < r$ dir.}

{$mak(a, b) = c$ $\Rightarrow a = c \vee b = c$ $\vee a < c \wedge b < c$}

$\Leftarrow$:

Tersine, $x_n \to x$ ve $y_n \to y$ olsun.

$\forall \varepsilon > 0$, $\forall n \geq n_1$ olduğunda $x_n \in B(x, \varepsilon)$ veya $|x_n - x| < \varepsilon$

Aynı $\varepsilon > 0$ için $\forall n \geq n_2$ olduğunda $y_n \in B(y, \varepsilon)$ veya $|y_n - y| < \varepsilon$

$n_0 = mak(n_1, n_2)$ denirse aynı $\varepsilon > 0$ için $\forall n \geq n_0$ olduğunda

$mak(|x_n - x|, |y_n - y|) < \varepsilon$ olur. O halde

$(x_n, y_n) \to (x, y)$ olur. //

2- (X, d) bir metrik uzay, (Y, d_Y) de alt uzayı olsun. $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de, (Y, d_Y) de bir dizi olsun.

a) Eğer (s_n) dizisi (Y, d_Y) alt metrik uzayında bir $y \in Y$ noktasına yakınsıyorsa, bu dizinin (X, d) metrik uzayında da aynı y noktasına yakınsayacağını gösterin.

b) (Y, d_Y) de bir limit noktası olmayan fakat (X, d) de bu uzayın bir elemanına yakınsayan bir $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin varlığını gösterin.

Çözüm// a) $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$, $S_n \to y \in Y$ dir. $Y \subset X$ olduğundan.

$y \in X$ dir. $\forall r>0$ için $B(y,r)$ X'de açık yuvar olsun.

$B'(y,r) = B(y,r) \cap Y$ den,

$B'(y,r)$ de, Y alt uzayında açık yuvardır.

$S_n \subset Y$'de yakınsak olduğundan $\forall n \geq n_0$ için $S_n \in B'(y,r)$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. (yakınsaklık tanımından)

$S_n \in B'(y,r) \subset B(y,r) \Rightarrow S_n \in B(y,r)$ olur. Bu ise

aradığımız nokta olur. (Alt uzayda yakınsak bir dizi üst uzayda yakınsaktır.)

b) (Üst uzayda yakınsak olan bir dizi alt uzayda yakınsak olmayabilir.)

$X = \mathbb{R}$, $Y = (0,1]$ alalım. ve $\mathbb{R}$ de mutlak değer metriği olsun.

$(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi olarak $\frac{1}{n}$ dizisini alalım.

$\left(\frac{1}{n}\right) \subset (0,1]$ dir. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ olur. $0 \notin Y$ dir.

Ancak $0 \in \mathbb{R}$ dir. Dolayısıyla dizi Y'de yakınsak değildir ancak $\mathbb{R}$ de yakınsaktır.

3 - $\mathbb{R}$ üzerinde mutlak değer metriği, $\mathbb{R}^2$ de $X = (x_1, y_1)$ $Y = (x_2, y_2)$

olmak üzere $d(x,y) = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$ olan pisagor metriği

konuluyor. Aşağıdaki fonksiyonların sürekli olduğunu gösterin.

a) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5x+7$ ($\mathbb{R}$ de mutlak değer metriği vardır.)

b) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x+y$

$f(a_1,a_2) \longrightarrow a_1+a_2$

Çözüm// a) $\forall a \in \mathbb{R}$ de sürekli olması $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\forall x \in X$ için $d(a,x) < \delta$

olduğunda $d'(f(a), f(x)) < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ bulunmasıdır.

$\forall a \in \mathbb{R}$ de sürekli olması $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\forall x \in X$ için, $|a-x| < \delta$

olduğunda $|f(a) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ bulunmasıdır.

$|f(a) - f(x)| = |5a+7-5x-7| = |5a-5x| = 5|a-x| < \delta . 5$

$\delta = \frac{\varepsilon}{5}$ alınırsa $= 5 \frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon$

$\Rightarrow |f(a) - f(x)| < \varepsilon$ olur. a noktası keyfi nokta olduğundan

bunu $\mathbb{R}$ deki her nokta için yapabiliriz. Fonksiyon $\mathbb{R}$ de süreklidir.

b) $\forall a \in \mathbb{R}^2$, $a=(a_1,a_2) \in \mathbb{R}^2$ de sürekli olduğunu gösterelim.

$\forall \varepsilon > 0$ için $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ olduğunda

$d((a_1,a_2),(x,y)) < \delta$ olduğunda

$d((a_1,a_2),(x,y)) = \sqrt{(a_1-x)^2+(a_2-y)^2} < \delta$

$|a_1-x| \leq \sqrt{(a_1-x)^2+(a_2-y)^2} < \delta$ ve

$|a_2-y| \leq \sqrt{(a_1-x)^2+(a_2-y)^2} < \delta$

$\left\{ \begin{array}{l} |x| = \sqrt{x^2} \\ |x| < \sqrt{x^2+y^2} \end{array} \right.$

$\Rightarrow |a_1-x| < \delta$ ve $|a_2-y| < \delta$ olur.

$|f(a_1,a_2) - f(x,y)| = |a_1+a_2-x-y| \leq |a_1-x| + |a_2-y| < \delta+\delta = 2\delta$

$\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ alırsak, $\Rightarrow 2\delta = \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$a=(a_1,a_2)$, $\mathbb{R}^2$ de keyfî nokta olduğundan $\mathbb{R}^2$ nin her noktasında

sürekldir.

4- (X,d), (Y,d') iki metrik uzay, $f: X \to Y$ olsun. $k>0$ olmak üzere

$\forall x, x' \in X$ için $d(x,x') \geq k\, d'(f(x),f(x'))$ koşulu sağlanıyorsa

f nin sürekli olduğunu gösteriniz.

Çözüm // $\forall a \in X$ noktası için sürekli olduğunu gösterelim. $\forall x \in X$ için

$\forall \varepsilon > 0$ için $d(a,x) < \delta$ olduğunda $d'(f(a),f(x)) < \varepsilon$ olacak şekilde

$\delta > 0$ sayısı olmalı.

$d(x,x') \geq k\, d'(f(x),f(x')) \Rightarrow d'(f(a),f(x)) \leq \frac{1}{k} d(a,x) < \frac{1}{k}\delta \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(d'(f(x),f(x')) \leq \frac{1}{k} d(x,x')\right.$ den yazarak)

$\Rightarrow \delta = k.\varepsilon$ alınırsa $\Rightarrow \frac{\varepsilon . k}{k} = \varepsilon$

$\Rightarrow d'(f(a),f(x)) < \varepsilon$ olmalıdır. $\Rightarrow f$ süreklidir.

5- $X = C([a,b],\mathbb{R})$ uzayında $f,g \in X_0$

$d_1(f,g) = \int_a^b |f(t)-g(t)|\,dt$ metriği ve $\mathbb{R}$ üzerinde de d_2 olarak

mutlak değer metriği veriliyor.

$I: (X,d_1) \longrightarrow (\mathbb{R},d_2)$

$f \longrightarrow I(f) = \int_a^b f(t)\,dt$ biçiminde tanımlandığına göre

I fonksiyonunun sürekli olduğunu gösteriniz.

(C : Continuos : Sürekli)

Çözüm // I fonksiyonunun herhangi bir $f_0 \in C([a,b], \mathbb{R})$ de sürekli olduğunu gösterelim. $\forall \varepsilon > 0$, $\forall f_0 \in X$,

$d_1(f, f_0) < \delta$ olduğunda $d_2(I(f), I(f_0)) < \varepsilon$ olacak şekilde

$\delta > 0$ sayısı bulunmalıdır. Metriğe göre verilenleri düzenleyelim.

$d_1(f, f_0) = \int_a^b |f(t) - f_0(t)|\, dt < \delta$ olduğunda

$$|I(f) - I(f_0)| = \left| \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^b f_0(t)\,dt \right| \qquad \left\{ \left|\int f(t)dt\right| \leq \int |f(t)|\,dt \right.$$

$$= \left| \int_a^b [f(t) - f_0(t)]\,dt \right| \leq \int_a^b |f(t) - f_0(t)|\,dt$$

$\delta = \varepsilon$ olursa $\Rightarrow |I(f) - I(f_0)| < \varepsilon$ olur.

II. BÖLÜM

TOPOLOJİK UZAYLAR

2.1.1. Tanım : X bir küme τ da X'in alt kümelerinin aşağıdaki koşulları sağlayan bir ailesi olsun :

1- $X \in \tau$ ve $\phi \in \tau$.

2- τ ailesinin sonlu sayıda elemanlarının arakesiti τ ya aittir.

3- τ nun herhangi sayıda elemanlarının birleşimi yine τ ya aittir.

2- $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $\quad A = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \quad A \in \tau$

3- $\forall A_i \in \tau$, $(A_i)_{i \in I} \subset \tau$, $A = \bigcup_{i \in I} A_i$, $A \in \tau$

Bu takdirde τ ya, X üzerinde bir topoloji, (X, τ) ikilisine de bir topolojik uzay denir. τ ailesinin her elemanına bir açık küme (τ-açık küme), X kümesinin her elemanına da nokta denir.

1. Örnek // $\tau = \{X, \phi\}$ X üzerinde bir topolojidir.

- X ve ϕ, τ ya aittir. $X, \phi \in \tau$ dur.
- $X \cap \phi = \phi \in \tau$
- $X \cup \phi = X \in \tau$

$\tau = \{X, \phi\}$: basit (kaba) topoloji adı verilir
ilkel (trivial)

Bir küme üzerinde birden çok topoloji verilebilir. En küçüğü bu örnekte verilendir. (1. Örnek'te)

2.Örnek // $\tau = P(X)$ kuvvet kümesini alalım. $P(X)$, X üzerinde bir topolojidir. ?

Kuvvet kümesi : X'in tüm alt kümelerinin ailesidir.

• $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$

• $\forall A_1, A_2, \ldots, A_n \in \overset{=\tau}{P(X)} \Rightarrow A_1 \subset X, A_2 \subset X, \ldots, A_n \subset X = A \subset X$

$$\Rightarrow A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \subset X$$

$$\Rightarrow A \subset \tau$$

• $(A_i)_{i \in I} \subset \tau \Rightarrow \forall i \in I$ için $A_i \subset X$

$$\Rightarrow A = \bigcup_{i \in I} A_i \subset X$$

$$\Rightarrow A \in \tau = P(X)$$

τ'ya noktasal topoloji, uzaya da noktasal topolojik uzay denir.

(Noktasal = $\underset{=\text{ayrık}}{\text{diskret}}$ topoloji) En büyük topoloji noktasal topolojidir.

3.Örnek // (X, d) bir metrik uzay olsun. Açıkların ailesini τ ile gösterelim.

τ, X üzerinde bir topolojidir. (Teorem 1.6.2. den dolayı)

• $X \in \tau$, $\emptyset \in \tau$.

• Sonlu sayıda açık kümenin arakesiti açıktır.

• Herhangi sayıda açık kümenin birleşimi yine açıktır.

Bu topolojiye d metriği tarafından oluşturulan metrik topoloji denir.

O halde her metrik uzay, bir topolojik uzaydır.

(Basit ve noktasal topoloji, en küçük ve en büyük topoloji olduğundan tüm topolojiler bunların arasında kalır.)

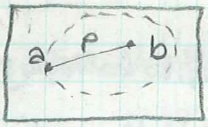
4.Örnek // $X = \{a, b\}$ $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}\}$ (Sierpinski Topolojisi)

2- $X \cap \{a\} = \{a\} \in \tau$, $\emptyset \cap \{a\} = \emptyset \in \tau$, $\emptyset \cap X = \emptyset \in \tau$

$X \cap \{a\} \cap \emptyset = \emptyset \in \tau$

3- Birleşimler için de sağlanır.

(X, τ) topolojik uzaydır. $\{a\}$ olduğundan basit topolojiden büyüktür.



$P = d(a,b)$ olsun. $B(b,P)$ alalım.

$B(b,P) = \{x \in X \mid d(b,x) < P\} = \underline{\{b\}}$ açık yuvar.

açık yuvar.

(X,d) de açıktır. τ ya göre açık değildir.

O halde τ topolojisi bir metrik uzay tarafından oluşturulamaz.

2.1.2. Tanım : (X,τ) bir topolojik uzay $A \subset X$ olsun. Eğer $X-A$ açıksa A'ya kapalıdır denir.

Teorem 2.1.1 (X,τ) bir topolojik uzay olsun.

1- X ve ϕ, X'in kapalı alt kümeleridir.

2- X'in herhangi sayıda " " " nin arakesiti yine kapalı bir kümedir.

3- X'in sonlu sayıda kapalı alt kümelerinin birleşimi yine kapalı kümedir.

1-) $X \in \tau \Rightarrow X$ açıktır. $\Rightarrow X - X = \phi$ kapalıdır.

$\phi \in \tau \Rightarrow \phi$ açıktır $\Rightarrow X - \phi = X$ kapalıdır.

Hem X kümesi hem ϕ, hem açık hem de kapalı kümedir.

2-) $(A_i)_{i\in I}$ kapalılar ailesi olsun. A_i kapalı ise $X - A_i$ açıktır.

$X - \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I}(X - A_i) \in \tau$ yani açıktır. $\Rightarrow \bigcap_{i\in I}(A_i)$ kapalıdır.

3-) $(A_i)_{i\in I}$ kapalı ise $X - A_i$ açıktır. $\bigcup_{i\in I} A_i$ nin kapalı olduğunu gösterelim.

Tümleyenini alalım. $X - \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} (\underbrace{X - A_i}_{açık}) \in \tau$ idi. Öyle ise

$\bigcup_{i\in I} A_i$ kapalıdır.

16 Kasım 94.

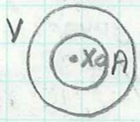
2.1.3. Tanım : (X,τ) bir topolojik uzay ve $X_0 \in X$ olsun.

Bu X_0 noktasını eleman kabul eden X'in her açık alt kümesine X_0 noktasının bir açık komşuluğu denir.

Demek ki herhangi bir küme kendi içindeki her noktanın bir açık komşuluğudur.

2.1.4. Tanım : (X,τ) ve $X_0 \in X$ olsun. X_0 noktasının bir açık komşuluğunu alt küme kabul eden, X'in her alt kümesine bu X_0'ın bir komşuluğu denir.

(V, X_0'ın bir komşuluğu) $\Leftrightarrow$ ($X_0 \in A$, $A \subset V$ ve A, X_0'ın bir açık komşuluğu)



X_0'ın açık komşuluğu.

Örnek// $\mathbb{R}$ üzerinde $d(x,y) = |x-y|$ topolojisi koyalım.

$[0,3]$ kümesi 1 noktasının bir komşuluğu mudur?

$1 \in (0,2)$ de bir açık aralık ve aynı zamanda bir açık küme

$1 \in (0,2) \subset [0,3]$

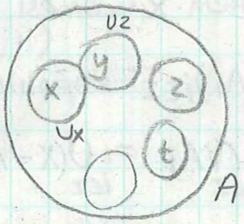
Açık komşuluk olması için açık kümeyi kapsaması gerekir.

Örnek// $[0,3)$ aralığı, 3 noktasının bir açık komşuluğu değildir. Çünkü 3 noktasını içinde bulunduran hiçbir açık küme yoktur.

$\mathcal{V}(x_0) \rightarrow$ X_0 noktasının komşuluklarının (tüm) ailesini gösterecek.

Teorem 2.1.2. (X, τ), $A \subset X$ olsun.

A kümesinin açık olması için gerekli ve yeterli koşul, kendi içindeki her noktanın bir komşuluğu olmasıdır.



İspat// A kümesi açık ise, kabul edelim ki;

A, kendi içindeki her noktanın bir komşuluğu ise

$\forall x \in A$ için $x \in U_x \subset A$ olacak şekilde bir U_x açık komşuluğu vardır. $\bigcup_{x \in X} U_x = A$ her açık kümenin birleşimi yine açık kümedir.

Sonuç// Bir topolojik uzayda verilen herhangi bir x noktası için bu noktanın bütün komşulukları biliniyorsa, o uzayın bütün açık kümeleri biliniyor demektir. Başka bir deyişle bir küme üzerinde verilen iki topoloji için, her iki topolojiye göre de komşuluklar aynı ise bu iki topoloji çakışıktır.

Teorem 2.1.3. (X, τ) bir topolojik uzay olsun.

1- $\forall x \in X$ için x noktasının en az bir N komşuluğu vardır.

2- $\forall x \in X$ için x noktasının her komşuluğu x noktasını içerir.

3- Eğer $N \in \vartheta(x)$ ve $N \subset N'$ ise $N' \in \vartheta(x)$ olur.

4- Eğer $M, N \in \vartheta(x)$ ise $M \cap N \in \vartheta(x)$ dir.

5- Her $N \in \vartheta(x)$ için öyle bir $M \in \vartheta(x)$, $M \subset N$ vardır ki N, M içindeki her noktanın bir komşuluğu olur.

İspat// 1- $X \in \tau$, X'in kendisi bir açık kümedir.

$x \in X$ ise X, x'in bir açık komşuluğudur. (N yerine X alınırsa)

2- Komşuluk tanımı gereği vardır.

3- $N \in \vartheta(x) \Rightarrow \exists A$ açık $x \in A \subset N$

$\Rightarrow x \in A \subset N \subset N'$ kabulümüzden dolayı

$x \in \underset{\text{açık}}{A} \subset N' \Rightarrow N' \in \vartheta(x)$ dur.

4- $M, N \in \vartheta(x) \Rightarrow M \in \vartheta(x) \Rightarrow x \in \underset{\text{açık komşuluk}}{U} \subset M$

$N \in \vartheta(x) \Rightarrow x \in V \subset N$ olacak şekilde

U ve V, x'in birer açık komşuluğudur.

$x \in \underbrace{U \cap V}_{\text{açık komşuluk}} \subset M \cap N \Rightarrow M \cap N \in \vartheta(x)$

5- $N \in \vartheta(x) \Rightarrow \exists N$ açık komşuluğu vardır ki,

$x \in \underset{\text{açık}}{M} \subset N \Rightarrow$ (komşuluk tanımından)

M'nin hangi açık kümesini alırsak alalım N'nin bir açık komşuluğu olacaktır.

Komşuluklar Tabanı, Topoloji Tabanı (Bazı)

2.1.5. Tanım: (X, τ), $x \in X$, $\vartheta(x)$

Kabul edelim ki, $B(x) \subset \vartheta(x)$ olsun. Eğer her $V \in \vartheta(x)$ için $U \subset V$ olacak şekilde bir $U \in B(x)$ varsa $B(x)$ kümesine $\vartheta(x)$'in bir tabanı denir. (Veya komşuluklar tabanı denir.)

Örnek 1// (X, τ) bir topolojik uzay, $x \in X$ olsun. x noktasının açık komşuluklarının kümesi $\nu(x)$'in bir tabanıdır.

(X, τ), $x \in X$, $\vartheta(x)$: bütün komşuluklarının ailesi.

Bu taktirde x noktasının bütün açık komşuluklarının ailesini de

$B(x)$ ile gösterelim. $B(x)$, $V(x)$ in bir tabanıdır veya $B(x)$, x noktasının komşuluklar tabanıdır.

$\forall V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow x$'in öyle bir $\exists U$ açık komşuluğu vardır ki,

$\exists U \in B(x) \overset{\text{öyle ki}}{:} U \subset V$ (öyle bir $U \in B(x)$ bulduk öyle ki $U \subset V$)

$B(x)$, $\mathcal{V}(x)$ in bir tabanıdır.

Örnek 2// $\mathbb{R}$ üzerinde mutlak değer metriği tarafından oluşturulan,

$d(a,b) = |a-b|$ topolojiyi koyalım. Ve $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{V}(x)$ komşuluklar ailesi olsun.

$$B(x) = \{ V_n \mid V_n = (x - \tfrac{1}{n}, x + \tfrac{1}{n}),\ n = 1,2,\dots \}$$

$B(x)$, $V(x)$ in bir tabanıdır. Çünkü alacağınız $\forall V \in \mathcal{V}(x)$ için $\underset{\text{açık}}{\exists A}$ bulacağız ki,

$x \in A \subset V$, $A \in B(x)$, $B(x)$, $\mathcal{V}(x)$in bir tabanıdır.

τ'nun bütün elemanlarını bilmek yerine τ nun bazı elemanlarını bilirsek, bu tabanı biliyoruz demektir.

2.1.6. Tanım: (X, τ) bir topolojik uzay, $B \subset \tau$ olsun. Eğer τ nun her elemanı B'nin bazı elemanlarının birleşimine eşitse, B'ye τ topolojisinin bir tabanı veya topoloji tabanı denir.

Örnek// $X = \{a,b,c\}$ olsun. Bunun üzerine τ = noktasal topolojiyi koyalım. $B = \{\{a\},\{b\},\{c\},\phi\}$ ailesi bu topoloji için bir topoloji tabanıdır. ?

$\tau = \{X, \phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$

$X = \{a\} \cup \{b\} \cup \{c\}$

Sonuç: B ailesi τ topolojisinin bir tabanıdır.

UYGULAMA

1- $X = \{a,b,c,d,e\}$ kümesinin alt kümelerinin aşağıdaki aileleri veriliyor. Bunların X üzerinde bir topoloji olup olmadığını gösteriniz.

a) $\tau_1 = \{X, \phi, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}\}$

b) $\tau_2 = \{X, \phi, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,b,c,d\}\}$

c) $\tau_3 = \{X, \phi, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}$

Çözümler// a) i) $\phi, X \in \tau$ ii) $\forall A_i \in \tau, \bigcup A_i \in \tau$ iii) $\forall A_i \in \tau, \bigcap A_i \in \tau$ 233

olmalıdır. i. doğru. ii. doğru değil.

$\{a,b\} \in \tau_1$, $\{a,c\} \in \tau_1 \Rightarrow \{a,b,c\} \notin \tau_1$ olduğundan,

τ_1, X üzerinde topoloji değildir.

b) i. ve ii. doğru. Kesişimlerini alırsak,

$\{a,b,c\} \in \tau_2$ ve $\{a,b,d\} \in \tau_2 \Rightarrow$ arakesiti olan,

$\{a,b,c\} \cap \{a,b,d\} = \{a,b\} \notin \tau_2$ olur. O halde,

τ_2, X üzerinde topoloji değildir.

c) i. doğru. Aynı şekilde ii. ve iii. de doğrudur. O halde,

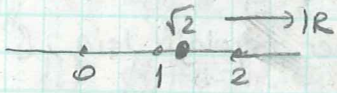
τ_3, X üzerinde bir topolojidir.

2 – τ ile ϕ, IR ve $q \in \mathbb{Q}$ rasyonel sayı olmak üzere

$\tau = \{\phi, \mathbb{R}, A_q = (q, \infty), q \in \mathbb{Q}\}$ kümesi, verilsin. O halde,

τ, IR üzerinde bir topoloji midir?

Çözüm// $q > \sqrt{2}$ seçelim. $A_q \in \tau$ olduğu halde, birleşimi olan $\bigcup_{q>\sqrt{2}} A_q$ da



$(\sqrt{2}, \infty) \notin \tau$ olur. Yani,

$\bigcup_{q>\sqrt{2}} A_q = (\sqrt{2}, \infty) \notin \tau$ olur. O halde,

τ, IR üzerinde bir topoloji değildir. $(\sqrt{2} \notin \mathbb{Q})$

3 – $A = \{a,b,c\}$ kümesi üzerine konan τ noktasal topolojisi için bir topoloji tabanı yazınız.

$\tau = \{\phi, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$

τ nun her elemanı $\mathcal{B} = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \phi\}$ ailesinin bazı elemanlarının birleşimi olarak yazılabildiğinden $\mathcal{B}$, τ topolojisi için bir topoloji tabanıdır.

- $\phi \in \tau$ için;

  $\phi = \phi \cup \phi \quad (\phi \in \mathcal{B})$

- $A = \{a,b,c\} \in \tau$ için;

  $\{a,b,c\} = \underbrace{\{a\}}_{\in \mathcal{B}} \cup \underbrace{\{b\}}_{\in \mathcal{B}} \cup \underbrace{\{c\}}_{\in \mathcal{B}}$

- $a \in \tau$ için; $\{a\} = \underbrace{\{a\}}_{\in \mathcal{B}} \cup \phi$ • b, c}, $\{a,b\}$, (a,c), $(b,c) \in \tau$

olduğundan, τ nun her elemanı $\mathcal{B}$ nin bazı (uygun) elemanlarının birleşimi olarak yazıldığından, $\mathcal{B}$, τ topolojisi için bir topoloji tabanıdır.

★ Her topoloji tanım gereği kendisi için bir topoloji tabanıdır.

4- $X=\{a,b,c\}$ kümesiyle, bunun alt kümelerinin bir,

$$\mathcal{B}=\{\{a,b\},\{b,c\},\phi\}\subset\tau$$

ailesi veriliyor. $\mathcal{B}$'nin X üzerine konulacak topolojilerin hiçbirisi için bir topoloji tabanı olmayacağını gösterin.

Çözüm// (τ, X üzerinde herhangi bir topoloji ve) $\mathcal{B}$, τ için topoloji tabanı olsaydı, $\mathcal{B}\subset\tau$ olup, τ nun her elemanı, $\mathcal{B}$'nin bazı elemanlarının birleşimi olarak yazılabilmeliydi.

$\mathcal{B}\subset\tau$ olduğundan $\{a,b\}\in\tau$ olur. $\{b,c\}\in\tau$ olur. ve kesişimleri olan,

$\{a,b\}\cap\{b,c\}=\{b\}\in\tau$ durdu.

$\{b\}$ tek nokta kümesi $\mathcal{B}$'nin hiçbir elemanının birleşimi olarak yazılamaz. O halde $\mathcal{B}$, τ için bir topoloji tabanı değildir. Oysa τ topolojisi keyfi (herhangi) bir topoloji olduğundan, her topoloji için, $\mathcal{B}$, X üzerine konulan topolojilerin hiçbirisi için topoloji tabanı olmaz.

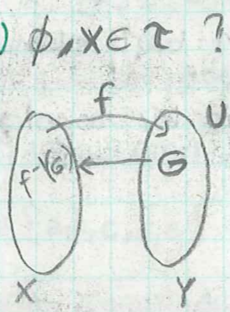
5- $X\neq\phi$, $(Y,\mathcal{U})$ bir topolojik uzay, $f:X\to Y$ olsun. Bir τ ailesini,

$$\tau=\{f^{-1}(G)\mid G\in\mathcal{U}\}$$

biçiminde tanımlayalım. τ'nun X üzerinde bir topoloji olduğunu gösteriniz.

ya da, (X,τ) bir topolojik uzay mıdır?

Çözüm// i) $\phi, X\in\tau$? ($\Leftarrow$ $\underbrace{f^{-1}(\phi)}_{\in\mathcal{U}}=\phi\in\tau$ olur.)



$X=f^{-1}(Y)$ $\mathcal{U}$ topolojik uzay old.

$Y\in\mathcal{U}$ dur. $X\in\tau$ dur.

ii) I herhangi bir sayıda indisleyen küme olsun. $\forall(A_i)_{i\in I}\in\tau$ ise $\bigcup A_i\in\tau$ mudur?.

$\forall i\in I$ için $A_i\in\tau$ olduğundan

$A_i = f^{-1}(G_i)$ olacak şekilde $G_i \in \mathcal{U}$ vardır. (Tanımdan)

$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(G_i) = f^{-1}(\underbrace{\bigcup G_i}_{\in \mathcal{U}})$ vardır. $\left(f^{-1}(A\cup B) = f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)\right)$

$G_i \in \mathcal{U}$ dur. $\mathcal{U}$ topoloji olduğundan $\bigcup G_i$ de $\mathcal{U}$'ya aittir.

O halde $\bigcup A_i \in \tau$ olur.

iii) I sonlu sayıda indisleyen küme olsun.

$\forall (A_i)_{i\in I} \in \tau$ için $\bigcap A_i \in \tau$?

$A_i = f^{-1}(G_i)$ o.ş. $G_i \in \mathcal{U}$ vardır. ($\forall i \in I$ için)

$\bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(G_i) = f^{-1}(\bigcap G_i)$ vardır. $\left(f^{-1}(A\cap B) = f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)\right)$

$\bigcap G_i$ de $\mathcal{U}$'ya aittir.

O halde $\bigcap A_i \in \tau$ dur. O halde τ bir topolojidir.

6- τ ile $\mathbb{R}, \phi$ ve $a\in\mathbb{R}$ olmak üzere $E_a = (a, \infty)$ biçimindeki açık aralıkların meydana getirdiği aileyi gösterelim. τ nun $\mathbb{R}$ üzerinde bir topoloji olduğunu gösteriniz.

Çözüm// i) $\phi, \mathbb{R} \in \tau$ dur. (Soruda verildi)

ii) $\phi \cup \mathbb{R} = \mathbb{R} \in \tau$,

I herhangi sayıda bir indisleyen küme olmak üzere τ'ya ait olan açıkların birleşiminin de τ'ya ait olduğunu gösterelim.

$E_i = (i, \infty) \in \tau$, $\bigcup E_i \in \tau$? $i \in I$

(I herhangi sayıda $\Rightarrow$ sonlu, sonsuz, sınırlı, sınırsız olabilir.)

I indisleyen kümesi, aşağıdan sınırlı da olabilir sınırsız da olabilir. (aşağıdan)

• " " " sınırsız (sonsuz) ise i, $-\infty$'a doğru yaklaşır.

Birleşimleri de $(-\infty, \infty)$ açık aralığı olur.

• Eğer I sınırlı (sonlu) ise mutlaka en büyük alt sınırı vardır.

$E_i = (i, \infty) \in \tau$ için ($\forall i \in I$)

$\bigcup E_i = \bigcup_{i\in I} (i, \infty) \in \tau$?

$\longleftarrow\!\!\!-\!\!\!\overset{\bullet}{0}\!\!\!-\!\!\!\longrightarrow \mathbb{R}$ $i=-3$ ise $E_{-3}=(-3,\infty)$ olur.
$i=0$ ise $E_0=(0,\infty)$ olur.

i büyüdükçe aralıklar küçülür. Veya i'ler azaldıkça (küçüldükçe) aralıklar büyür. Yani $\inf I = I_0$ dersek,

$$\bigcup_{i\in I} E_i = \bigcup (i,\infty) = (i_0,\infty) = E_{i_0} \in \tau \text{ olur.}$$

Alttan sınırlı olduğundan EBAS vardır.

$\underline{\quad}\circ\underline{\quad}$ (Baştan devam)

$\tau = \{\phi, \mathbb{R}, E_i(i,\infty)\}$ $(\mathbb{R},\tau)$?

i- $\phi, \mathbb{R} \in \tau$

ii- $E_i = (i,\infty) \in \tau$ olmak üzere, I herhangi sayıda indisleyen küme.

$\bigcup_{i\in I} E_i \in \tau$?

$E_{-2}=(-2,\infty)$
$E_{-1}=(-1,\infty)$
$E_0=(0,\infty)$
$E_1=(1,\infty)$

inf $\longleftarrow$ -2 -1 0 1 2 $\longrightarrow \mathbb{R}$

indisler arttıkça aralıklar küçülür.

I kümesi ya alttan sınırsızdır veya alttan sınırlıdır.

Üstten zaten ∞'a gittiğinden sınırsızdır. $\inf I = i_0$ dersek,

$$\bigcup_{i\in I} E_i = \bigcup_{i\in I} (i,\infty) = (i_0,\infty) \in \tau \text{ olur.} //$$

iii- $E_i=(i,\infty)\in\tau$ olmak üzere, I herhangi sayıda indisleyen küme.

$$\bigcap_{i\in I} E_i \in \tau ? \Rightarrow \bigcap_{i\in I} (i,\infty) \in \tau ?$$

indisler büyüdükçe aralıklar küçülür. $\sup I = i_0$ dersek,

$$\bigcap_{i\in I} E_i = \bigcap_{i\in I} (i,\infty) = (i_0,\infty) \in \tau \text{ olur.} //$$

O halde τ, $\mathbb{R}$ üzerinde bir topolojidir. $(\tau,\mathbb{R})$ topolojik uzaydır.

7 - τ ailesi $\mathbb{N}, \phi$ ve aşağıdaki gibi tanımlanan E_n kümelerinin bir ailesi olsun. $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere

$$E_n = \{n, n+1, n+2, \dots\}$$

a) τ ailesinin $\mathbb{N}$ üzerinde bir topoloji olduğunu gösteriniz.

b) $6\in\mathbb{N}$ elemanını içeren açık kümeleri yazınız.

Çözüm // $E_n=\{n,n+1,n+2,\dots\}$ a) i- $\phi, \mathbb{N}\in\tau$

$E_0=\{0,1,2,\dots\}$ $E_1=\{1,2,3,\dots\}$ $E_2=\{2,3,4,\dots\}$ $E_3=\{3,4,\dots\}$

I indisleyen (numaralayan) kümesi herhangi sayıda olsun. $i \in I$

ii- $\underbrace{\bigcup_{i\in I} E_n}_{\text{en büyük alt küme.}} \in \tau$? I herhangi sayıda olduğuna göre $n \in \mathbb{N}$

$I \subset \mathbb{N}$ olur. $\mathbb{N}$ sayılar kümesi alttan sınırlıdır.

Bu şekildeki n'lerin infimumuna n_0 diyelim.

$\bigcup_{i\in I} E_n = E_{n_0}$ olur. E_{n_0}: en küçük sayıdır. $E_{n_0} \in \tau$

iii- I sonlu sayıda numaralanabilir küme olmak üzere $(E_n)_{n\in I} \in \tau$

olmak üzere $\bigcap E_n \in \tau$? (en küçük alt küme olmalı) yani indis en büyük olmalı.

O halde I'ların supremumunu almalıyız. Supremuma n_0 dersek,

$\bigcap_{i\in I} E_n = E_{n_0}$ olur. E_{n_0}: en büyük sayıdır. $E_{n_0} \in \tau$.

O halde τ, $\mathbb{N}$ üzerinde bir topolojidir. $(\tau, \mathbb{N})$ topolojik uzaydır.

b- $6 \in \mathbb{N}$ açık kümelerini bulmalıyız.

$E_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$ $E_3 = \{3,4,5,6,7,8\}$ $E_5 = \{5,6,7,8,9,10\}$

$E_2 = \{2,3,4,5,6,7\}$ $E_4 = \{4,5,6,7,8,9\}$, $E_6 = \{6,7,8,9,10,11\}$

E_6 dan sonraki kümeler $6 \in \mathbb{N}$ sayısını içermezler. Bu nedenle

$E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6$ kümeleri 6 tamsayısını içeren açık kümelerdir.

8- Aşağıdaki aralıkların $\mathbb{R}$ üzerindeki alışılmış topolojiye göre

$0 \in \mathbb{R}$ elemanlarının komşulukları olup olmadığını gösteriniz.

a) $A = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

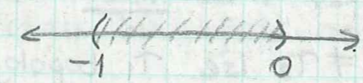
$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

$\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

Herbir aralık bu aralığın komşuluğudur.

O halde A kümesi 0'ın komşuluğudur.

b) $B = (-1, 0)$



0'ın komşuluğu değildir.

Çünkü bu açık aralığa hiçbir açık aralık yazılamaz. (sıfırın komşuluğunda)

c) $C = [0, 1/2)$

komşuluk değildir.

d) $D = (0, 1]$

komşuluk değil. (sıfırı içermez.)

ko

9- $X=\{a,b,c,d,e\}$ kümesi üzerinde,

$\tau=\{X, \emptyset, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}, \{a,b,e\}\}$ ← X kümesinin açıklarıdır.

topolojisi veriliyor. (e) ve (c) noktalarının tüm komşuluklarını yazınız.

Çözüm// $V(e)=\{X, \underbrace{\{a,b,e\}}_{\tau da}, \underbrace{\{a,b,e,c\}, \{a,b,e,d\}}_{X'de}\}$

$V(c)=\{X, \underbrace{\{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}}_{\tau'da}, \underbrace{\{a,c,d,e\}}_{X'de}\}$

10- (X,τ) bir topolojik uzay, B'de τ'nun bir topoloji tabanı olsun. $B\subset B^*\subset\tau$ kapsaması sağlanıyorsa, B^* ailesinin de τ için bir topoloji tabanı olacağını gösteriniz.

Çözüm// B, τ için bir topoloji tabanı olduğunda, B'nin bazı elemanlarının birleşimi olarak yazılabilir. örneğin, $\forall G\in\tau$ için

$G=\bigcup_{i\in I} B_i$ olacak şekilde $B_i\in B$ vardır. ($\forall i\in I$ için)

$B\subset B^*$ olduğuna göre, B'nin her elemanı B^*'ın elemanıdır.

$\forall i\in I$, $B_i\in B \Rightarrow B_i\in B^*$ olur.

$\Rightarrow B^*$, τ için bir topoloji tabanı olur.

Vize buraya kadar.
28.11.94. Çarş.

2.2. Topolojilerin Karşılaştırılması

2.2.1. Tanım: Bir X kümesi üzerinde τ_1 ve τ_2 topolojileri verilsin. Bu iki topolojinin açık kümeleri aynı ise bu topolojilere eşittirler denir ve bu $\tau_1=\tau_2$ yazılır.

2.2.2. Tanım: X kümesi üzerinde, τ_1 ve τ_2 topolojileri verilsin. Eğer $\tau_1\subset\tau_2$ ise τ_1'e τ_2 den kaba, veya τ_2, τ_1'den incedir denir.

Eğer τ_1, τ_2 den kaba ve $\tau_1\neq\tau_2$ ise τ_1 topolojisine τ_2'den kesin olarak kabadır veya τ_2 topolojisi τ_1 den kesin olarak incedir denir.

Örnek// X kümesi verilsin. $\tau_1=\{X,\emptyset\}$ kaba (basit) topoloji ve $\tau_2=P(X)$ noktasal topoloji verilsin. $\tau_1\subset\tau_2$ dir. Yani τ_1, τ_2 den kaba; τ_2, τ_1'de incedir. (Kaba topoloji; bir X kümesi üzerine konulabilecek topolojil en kabasıdır. Noktasal topoloji ise en incesidir.)

3,4, ... }

2.2.1. Teorem: Bir X kümesi üzerinde τ_1 ve τ_2 gibi iki topoloji verilsin. τ_1 topolojisinin τ_2 ye eşit olması için gerekli koşul, τ_1 topolojisinin τ_2'den ince, τ_2 topolojisinin τ_1'den ince olmasıdır.

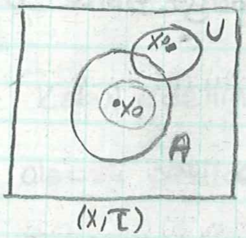
$$\tau_1 = \tau_2 \iff \tau_1 \subset \tau_2 \text{ ve } \tau_1 \supset \tau_2$$

İspat// τ_2, τ_1 topolojisinden ince olduğundan $\tau_1 \subset \tau_2$ ve τ_2 de τ_1 den ince olduğundan $\tau_2 \subset \tau_1$ yazılır. Buradan $\tau_1 = \tau_2$ elde edilir.

2.3. Kapanış, iç, dış, sınır.

2.3.1. Tanım (X, τ) topolojik uzay, $A \subset X$, $X_0 \in X$ olsun. Eğer X_0 noktasının her U komşuluğunda A kümesinin en az bir elemanı varsa bu X_0 noktasına A kümesinin bir değme noktası denir.

$(X_0, A$'nın değme noktasıdır$) \iff ($Her $U \in \mathcal{V}(X_0)$ için $U \cap A \neq \emptyset)$



O halde A kümesinin her elemanı (noktası) yine A'nın bir değme noktasıdır.

2.3.2. Tanım: (X, τ) bir topolojik uzay, $X_0 \in X$ olsun, $A \subset X$.

Eğer X_0 noktasının her U komşuluğunda A kümesinin X_0 dan başka en az bir noktası varsa, bu X_0 noktasına A kümesinin bir yığılma noktası denir. $(\forall U \in \mathcal{V}(X_0)$ $(U - \{X_0\}) \cap A \neq \emptyset)$

$(X_0$, A'nın bir yığılma noktası$) \iff ($$X_0$'ın her U komşuluğu için $U \cap A$'da X_0 dan başka A'dan en az bir eleman var.$)$

★ Her yığılma noktası bir değme noktasıdır. Fakat tersi doğru değildir.

2.3.3. Tanım: (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ ve $a \in A$ olsun.

Eğer a noktası A kümesinin bir yığılma noktası değilse, buna A'nın bir ayrık noktası denir.

Başka bir deyişle, a noktasının, $A \cap U = \{a\}$ olacak şekilde bir komşuluğu varsa bu a noktasına, A kümesinin ayrık noktası denir.

A kümesinin değme noktalarının kümesine A'nın değmesi diyeceğiz

Değme noktaları ; ya yığılma noktası , ya da ayrık noktalardır.

1.Örnek // $B=(0,1]\cup\{3\}$ kümesinin değme noktalarının kümesini arıyoruz.

$0\notin B$

bu noktalar yığılma ve dolayısıyla değme noktasıdır.

Sıfırdan başka alınan her komşulukta değme noktası vardır. Dolayısıyla sıfır noktası da yığılma , dolayısıyla değme noktasıdır.

$[0,1]\cup\{3\}$ B'nin değme noktalarının kümesidir. (Değmesidir.)

$3\in(2,4)$, $(2,4)$ aralığı 3 noktasının açık komşuluğudur.

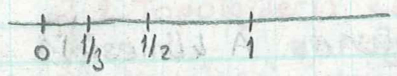
O halde $\{3\}$ noktası bir ayrık noktadır. $(U\cap B=\{3\}\ ,\ U=(2,4))$

2.Örnek // $B=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n},\ldots\}$

$0\notin B$, $n\to\infty$ ise limit sıfırdır. Kümeye ait olmadığı halde 0 bir yığılma, dolayısıyla değme noktasıdır.

$\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n},\ldots\}$ değmesidir.

$\frac{1}{3}$'ün ayrık olduğunu gösterelim.



$U=(\frac{1}{4},\frac{1}{2})$ alırsak $\frac{1}{3}\in U$ dur.

U, $\frac{1}{3}$ noktasının komşuluğudur.

$U\cap B=\{\frac{1}{3}\}$ olur.

Dizinin her elemanı birer ayrık nokta, sıfır ise yığılma noktasıdır.

Bir Kümenin Kapanışı

2.3.4.Tanım (X,τ) $A\subset X$

A kümesini kapsayan en küçük kapalı kümeye A nın kapanışı denir ve bu küme $\bar{A}$ ile gösterilir.

Hiçbir kapalı yoksa kapalı X in kendisidir. Eğer X'den başka A'nın içinde kapalı küme varsa, kesişimlerini alırız. Elde edilen küme en

küçük küme olur. Bu küme de kapalı ve A'nın kapanışı olur.

2.3.1. Teorem : (X,τ) bir topolojik uzay , $A\subset X$ olsun. Bu taktirde $\bar{A}$ ile A nın değme noktalarının kümesi aynıdır.

$,4,\ldots\}$

İspat// Kabul edelim ki $x \notin \bar{A}$ olsun. (x aynı zamanda A'nın değme noktası değildir. Bunu ispatlayacağız.) $A \subset B$, $B \subset A \Leftrightarrow A = B$ yerine

$\forall x \in A \Rightarrow x \in B$, $A \subset B$
$x \notin A \Leftarrow x \notin B$, $A \subset B$ } aynı şekildedir.

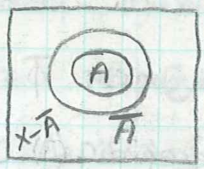
$x \notin \bar{A} \Rightarrow x \in X - \bar{A}$ ∴ $\bar{A}$ kapalıdır. O halde $X - \bar{A}$ açıktır.

O halde $X - \bar{A}$ kümesi x'in bir açık komşuluğudur.

$(X - \bar{A}) \cap A = \emptyset$ olur. $\left((X-\bar{A}) \cap \bar{A} = \emptyset\right)$ tümleyenidir.

x, A'nın bir değme noktası değildir.

(Böylece, değme noktalarının kümesi kapanışın alt kümesidir. Bunu ispatladık.)



$(X, \mathcal{T})$

Kabul edelim ki x bir değme noktası olmasın. O halde x'in $U \cap A = \emptyset$ olacak şekilde bir U açık komşuluğu vardır. Eğer $X - U = F$ dersek F kapalıdır ve $A \subset F$ dir. Ayrıca $x \in U$ olduğundan $x \notin F$ olur. O halde x noktası A kümesini kapsayan bütün kapalıların arakesitinde yani $\bar{A}$ da değildir.

Sonuç : A' ile A kümesinin yığılma noktalarının kümesini gösterelim. Bu teoremin sonucu $\bar{A} = A \cup A'$ yazılır.

2.3.2. Teorem : $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay $A \subset X$ olsun.

1 - A kümesinin kapalı olması için gerekli ve yeterli koşul, $A = \bar{A}$ olmasıdır.

2 - A kümesinin kapalı olması için gerekli ve yeterli koşul, A'nın her yığılma noktasının yine A'ya ait olmasıdır.

İspat 1// Eğer A kapalı ise A'yı kapsayan en küçük kapalı yine A olacağından $A = \bar{A}$ bulunur. Tersine $A = \bar{A}$ ise A kümesini kapsayan en küçük kapalı küme A olacağından A kapalıdır.

İspat 2// A kümesi kapalı olsun. (1) den dolayı $A=\overline{A}$ olup, $\overline{A}=A\cup A'$ ifadesi kullanılırsa, $A'\subset A$ elde edilir. Tersine $A'\subset A$ olsun. $\overline{A}=A\cup A'=A$ olduğundan A kümesi kapalı olur.

2.3.3. Teorem : (X,τ) bir topolojik uzay ve $A,B\subset X$ olsun. Aşağıdaki özellikler vardır:

1- $\overline{\phi}=\phi$, $\overline{X}=X$

2- $A\subset \overline{A}$

3- $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$

4- $A\subset B$ ise $\overline{A}\subset\overline{B}$

5- $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

İspat// Topoloji tanımı gereğince ϕ kapalı olduğundan $\overline{\phi}=\phi$ olur. Yine $A\subset\overline{A}$ kapsaması da kapalı küme tanımı gereğidir. (3)'ü ispatlamak için $F=\overline{A}$ diyelim. F kapalı olduğundan $\overline{F}=F$ yani $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$ bulunur. (4)'ü ispatlayalım. $A\subset B$ ve $B\subset\overline{B}$ olduğundan $A\subset\overline{B}$ bulunur. O halde $\overline{B}$, A kümesini kapsayan kapalı bir küme olduğundan A nın kapanışını da kapsar. Dolayısıyla $\overline{A}\subset\overline{B}$ olur. (5) için; $A\subset A\cup B$ ve $B\subset A\cup B$ kapsamaları ve (4) kullanılırsa, $\overline{A}\subset\overline{A\cup B}$, $\overline{B}\subset\overline{A\cup B}$ yazılır. Sonuç olarak, $\overline{A}\cup\overline{B}\subset\overline{A\cup B}$ elde edilir. $A\subset\overline{A}$ ve $B\subset\overline{B}$ kapsamalarından $A\cup B\subset\overline{A}\cup\overline{B}$ olup, $\overline{A}\cup\overline{B}$ kapalı olduğundan, kapanış tanımı gereğince $\overline{A\cup B}\subset\overline{A}\cup\overline{B}$ bulunur. O halde, $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ olur.

Uyarma// Arakesitler için (5) özelliği yoktur. Fakat $\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$ kapsaması vardır. Bu kapsamanın tersinin doğru olmadığını gösterelim. Örneğin;

$A=\mathbb{Q}$, $B=\mathbb{R}-\mathbb{Q}=\mathbb{I}$ alınırsa,

$\overline{A}=\mathbb{R}$, $\overline{B}=\mathbb{R}$ olur.

Böylece $\overline{A}\cap\overline{B}=\mathbb{R}$ fakat $\overline{A\cap B}=\phi$ bulunur. O halde

$\overline{A}\cap\overline{B}\subset\overline{A\cap B}$ kapsaması doğru değildir.

Örnekler// 1- $A=(0,3)\cup\{4\}$ ise $\bar{A}=[0,3]\cup\{4\}$ olur.

2- $A=[a,b]$ ise $\bar{A}=A=[a,b]$ dir.

3- $A=(a,b)$ ise $\bar{A}=[a,b]$ dir.

Bir kümenin içi

2.3.5. Tanım: (X,τ) bir topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun. A kümesi tarafından kapsanan bütün açık alt kümelerin birleşimine (ϕ da olabilir.) A'nın içi denir. ve $\mathring{A}$ veya $\text{int}\,A$ ile gösterilir. Böylece $\mathring{A}$, A tarafından kapsanan en büyük açık alt kümedir. $\mathring{A}$ kümesinin her noktasına da A nın bir iç noktası denir.

$A\subset X$ kümesinin açık olması için gerekli ve yeterli koşul, $A=\mathring{A}$ olmasıdır.

Örnekler// 1- $A=[a,b]$ kümesinin içi $\mathring{A}=(a,b)$ dir.

2- $A=(a,b)$ ise $\mathring{A}=(a,b)$ dir.

3- $A=[a,b)$ ise $\mathring{A}=(a,b)$ dir.

4- $A=(-\infty,b]$ ise $\mathring{A}=(-\infty,b)$ dir.

5- $A=(0,3]\cup\{4\}$ ise $\mathring{A}=(0,3)$ olur.

2.3.4. Teorem: (X,τ) bir topolojik uzay, $A,B\subset X$ olsun. Aşağıdaki öz. vardır:

1- $\mathring{X}=X$, $\mathring{\phi}=\phi$

2- $\mathring{A}\subseteq A$

3- $\mathring{\mathring{A}}=\mathring{A}$

4- $A\subset B$ ise $\mathring{A}\subset\mathring{B}$

5- $\widehat{A\cap B}=\mathring{A}\cap\mathring{B}$

İspat// 1- $\mathring{X}=X$ doğrudur. Yani X'in içi kendisine eşittir. Aynı şekilde ϕ kümenin içi yine ϕ dir.

2- Aşikârdır.

3- $\underset{\text{açık}}{F}=\mathring{A} \Rightarrow \mathring{F}=F \Rightarrow \mathring{\mathring{A}}=\mathring{A}$

4- $A\subset B$ ise A'nın en büyük açığını da B nin açığı kapsar. yani $\mathring{A}\subset\mathring{B}$ //

5- $\left.\begin{array}{l}\mathring{A}\subset A\\ \mathring{B}\subset B\end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\mathring{A}\cap\mathring{B}}_{\text{açık}} \subset \underbrace{A\cap B}_{\text{açık}}$

$\Rightarrow \mathring{A}\cap\mathring{B} \subset (A\cap B)^{\circ}$ ....(1)

$\left.\begin{array}{l} A\cap B\subset A \Rightarrow (A\cap B)^{\circ}\subset \mathring{A} \\ A\cap B\subset B \Rightarrow (A\cap B)^{\circ}\subset \mathring{B}\end{array}\right\} \Rightarrow (A\cap B)^{\circ}\subset \mathring{A}\cap\mathring{B}$ ...(2)

(1) ve (2) den dolayı, $(A\cap B)^{\circ} = \mathring{A}\cap\mathring{B}$ olur.

12.12.1994
Pazartesi

2.3.5. Teorem: (X,τ) bir topolojik uzay, $A\subset X$ olsun. Bu taktirde

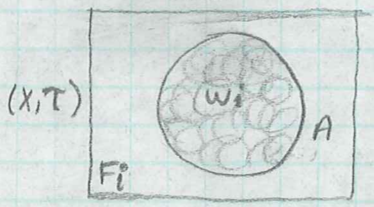
1- $X-\mathring{A} = \overline{X-A}$

2- $X-\overline{A} = (X-A)^{\circ}$

eşitlikleri vardır.

1. İspat// A kümesi tarafından kapsanan tüm açıkların ailesini $(W_i)_{i\in I}$ ile gösterelim. Yani her W_i açık ve $W_i\subset A$ dır.

$\mathring{A} = \bigcup_{i\in I} W_i$ (A 'daki açıklar, W_i lerin içindedir.)



Her $i\in I$ için

$F_i = X-\underbrace{W_i}_{\text{açık}}$ 'yi gösterelim.

O halde $\forall F_i$ kapalıdır.

$W_i\subset A \Rightarrow \underbrace{X-W_i}_{F_i} \supset X-A$

O halde her $i\in I$ için F_i'ler kapalı ve

$X-A\subset F_i$ olur. $(F_i)_{i\in I}$ da $X-A$ 'yı kapsayan bütün kapalıların ailesidir. (Kapalıların ailesinin arakesiti kapanışı verdiğinden ;)

$\bigcap_{i\in I} F_i = \overline{X-A}$ olur.

$X-\mathring{A} = X-\bigcup_{i\in I} W_i = \bigcap_{i\in I} X-W_i = \bigcap_{i\in I} F_i = \overline{X-A}$ //

2. İspat// $B=X-A$ diyelim. $\Rightarrow A=X-B$ (iki tarafın tümleyenini alarak)

$(X-B = X-(X-A) \Rightarrow A = X-B$ olur.)

$\mathring{B} = (X-A)^{\circ}$ ve $\overline{A} = \overline{X-B}$

$X-\mathring{B} = \overline{X-B} = \overline{A}$ tekrar tümleyen alırsak,

$X-(X-\overset{\circ}{B}) = X-\overline{A} \Rightarrow \overset{\circ}{B} = X-\overline{A}$ olur.

$\Rightarrow (X-A)^{\circ} = X-\overline{A}$ //

Bir kümenin Dışı, sınırı

2.3.6. Tanım: (X,τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ olsun. $X-A$ nın içine, A kümesinin <u>dışı</u>, dışın her elemanına da A kümesinin <u>dış noktası</u> denir. $\text{dış}A = (X-A)^{\circ}$ $(\text{dış}A = \text{ext}A)$

$\text{dış}A = (X-A)^{\circ} = X-\overline{A}$ idi. $X-\overline{A}$ kümesinin her elemanı A'nın dış noktasıdır.

(Bir kümenin tümleyeninin içi, o kümenin dışıdır. Bu kümenin dışının her elemanı dış noktadır.)

Örnek // ☆ $A=[2,3]$ olsun. $(\mathbb{R},\tau)$ topolojik uzay ise $\text{dış}A = ?$

$\overline{A}=[2,3]$ $\text{dış}A = \mathbb{R}-\overline{A} = \mathbb{R}-A = (-\infty,2)\cup(3,+\infty)$ olur.

bu birinci yol idi. Şimdi ikinci yola bakalım:

☆ $\text{dış}A = (X-A)^{\circ} = X-\overline{A}$ idi.

$\mathbb{R}-A = (-\infty,2)\cup(3,+\infty)$

$\text{dış}A = (\mathbb{R}-A)^{\circ} = (-\infty,2)\cup(3,+\infty)$ olur.

2.3.7. Tanım: (X,τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ ve $x_0 \in X$ olsun.

Eğer x_0 noktasının her V komşuluğunda, hem A'dan hem de $X-A$ dan en az birer nokta varsa bu x_0 noktasına A'nın bir <u>sınır noktası</u> denir. Sınır noktalarının kümesine ise A kümesinin sınırı denir ve A^* ile gösterilir. Böylece;

$$A^* = \underbrace{\overline{A}}_{\text{kapalı}} \cap \underbrace{(\overline{X-A})}_{\text{kapalı}} \text{ olur.}$$

$\Rightarrow$ arakesitleri kapalıdır. Yani A^* kapalı kümedir.

Örnek // $A=[2,3]$ alalım.

$\overline{A}=[2,3]$ $\overline{\mathbb{R}-A} = ?$ $A^* = ?$

$\mathbb{R}-A = (-\infty,2)\cup(3,+\infty)$

$\overline{\mathbb{R}-A} = (-\infty,2]\cup[3,+\infty)$

$A^* = \overline{A}\cap(\overline{\mathbb{R}-A}) = [2,3]\cap\{(-\infty,2]\cup[3,+\infty)\} = \{2,3\}$

2.3.6. Teorem: $(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay $A\subset X$ olsun. Bu taktirde;

$$A^* = \bar{A} - \mathring{A} \quad \text{olur.}$$

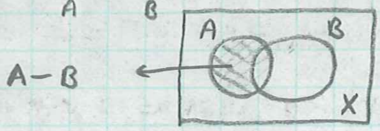
İspat// $A^* = \bar{A}\cap(\overline{X-A})$ (A nın sınırının tanımı gereği)

$\overline{X-A} = X-\mathring{A}$ (2.3.5. teoremden dolayı)

$$A^* = \underbrace{\bar{A}}_{A}\cap(\overline{X-A}) = \bar{A}\cap(\underbrace{X-\mathring{A}}_{B}) = \bar{A}-\mathring{A}$$

$A\cap \complement_X B = A-B$ veya

$A\cap(X-B) = A-B$ dir.



$\bar{A}=A$ ve $\mathring{A}=B$ dersek ispat tamamlanır.

Tanım olarak, $A^* = \bar{A}-\mathring{A}$ diyeceğiz.

Örnek olarak, $A=[2,3]$ dersek, $\bar{A}=A=[2,3]$ olur.

$A^* = \bar{A}-\mathring{A} = [2,3]-(2,3) = \{2,3\}$ sınırı olur.

2.3.7. Teorem: $(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay, $A\subset X$ olsun. A kümesi kapalı ise aşağıdaki özellikler eşdeğerdir.

1- $A = A^*$

2- $\mathring{A} = \emptyset$

3- $\overline{X-A} = X$

İspat// • $(1 \Rightarrow 2)$

$A^* = \bar{A}-\mathring{A}$ ($A^*=A$ kabulümüzden) $\bar{A}=A$ alarak,

$A = A-\mathring{A} \Rightarrow \mathring{A}=\emptyset$ olur.

• $(2 \Rightarrow 1)$

$\mathring{A}=\emptyset$ olsun. $A^*=\bar{A}-\mathring{A} \Rightarrow A^* = A-\emptyset \Rightarrow A^*=A$ olur.

(2 ve 3 ün denk olduklarını gösterelim)

• $(2 \Rightarrow 3)$

$X-\mathring{A} = \overline{X-A}$ ($\mathring{A}=\emptyset$ kabulden dolayı)

$X-\emptyset \Rightarrow X = \overline{X-A}$ olur. Tersine yapılabilir.

Örnekler: 1) 2. Örnek// $A=(0,1)\cup[4,5] \Rightarrow A^* = ?$

$$\left.\begin{aligned}\bar{A} &= [0,1]\cup[4,5]\\ \mathring{A} &= (0,1)\cup(4,5)\end{aligned}\right\} \Rightarrow A^* = \bar{A}-\mathring{A} = \{0,1,4,5\}$$

2) $A=(0,2]\cup\{6\}$ $A^*=?$

$\bar{A}=[0,2]\cup\{6\}$ $\mathring{A}=(0,2)$

$A^*=\bar{A}-\mathring{A}=\{0,2,6\}$

2.3.8. Tanım: (X,τ) bir topolojik uzay $A\subset X$ olsun.

Eğer $\bar{A}=X$ ise A'ya X'de her yerde yoğundur denir.

Eğer $\mathring{\bar{A}}\neq\emptyset$ ise A kümesine X'de yoğun bir alt küme ve eğer $\mathring{\bar{A}}=\emptyset$ ise A kümesine X'in yoğun olmayan alt kümesi denir.

1.örnek // $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinde her yerde yoğundur. $\bar{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$

2.örnek // $A=\{1,2,3\}=\underbrace{\{1\}}_{\text{kapalı}}\cup\underbrace{\{2\}}_{\text{kapalı}}\cup\underbrace{\{3\}}_{\text{kapalı}}$ $A\subset\mathbb{R}$

$\mathring{A}=\emptyset$ (tek nokta kümeleri olduğu için) $\bar{A}=A$ $\mathring{\bar{A}}=\emptyset$ olur.

A, $\mathbb{R}$ nin yoğun olmayan bir alt kümesidir.

3.örnek // $A=\mathbb{Q}\cap[0,1]$ olsun.

$\bar{A}=[0,1]$ yani A, $[0,1]$ de her yerde yoğundur.

2.3.8. Teorem. (X,τ) bir topolojik uzay, $A\subset X$, $B\subset X$ olsun.

1- Eğer A kümesi X'de her yerde yoğun ve $A\subset B\subset X$ kapsaması varsa, B de X'de her yerde yoğundur. $(\bar{A}=X)$

2- A; X'de her yerde yoğun olması için gerekli ve yeterli koşul, Her $x\in X$ ve her $V\in\mathcal{U}(x)$ için $A\cap V\neq\emptyset$ olmasıdır.

3- (A yoğun olmayan bir küme) $\Leftrightarrow$ ($\bar{A}$ yoğun olmayan bir küme) $\Leftrightarrow$ ($X-\bar{A}$, X'de her yerde yoğun) $\Leftrightarrow$ (X'in boş olmayan her U açık alt kümesi $V\cap A=\emptyset$ olacak şekilde bir boş olmayan açık alt küme içerir.)

4- Eğer A ve B, X'in yoğun alt kümeleri ise $A\cup B$ kümesi de X'in yoğun alt kümesidir.

(1° Herhangi bir küme esas uzayda yoğun ise tüm üst kümeleri de bu uzayda yoğundur.)

(2° $\bar{A}=X$, $\forall x\in X \Leftrightarrow \forall U\in\mathcal{U}(x)$, $A\cap U\neq\emptyset$)

(3° $\overline{A} \neq X \Leftrightarrow A \neq X \Leftrightarrow \forall U \in U(x),\ V \cap A = \phi$)

(4° $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$ $\quad 1^\circ$ özelik 'ten.
$\downarrow$
X'de her yerde yoğun olduğundan üst kümesi olan $A \cup B$ de X'de yoğundur.)

Uygulama :

1 - $X = \{a, b, c, d, e\}$ kümesinin alt kümelerinin,

$\tau = \{X, \phi, \underbrace{\{a\}}_{açık}, \underbrace{\{c, d\}}_{açık}, \underbrace{\{a, c, d\}}_{açık}, \underbrace{\{b, c, d, e\}}_{açık}\}$ ailesi veriliyor.

i - τ nun X üzerinde bir topoloji olduğunu gösteriniz.

ii - $\{b\}$, $\{a, c\}$ ve $\{b, d\}$ kümelerinin kapanışını bulunuz.

iii - X kümesinde heryerde yoğun olan ve heryerde yoğun olmayan bir alt küme bulunuz.

($Q \subset \mathbb{R}$ $\overline{Q} = \mathbb{R}$ Q rasyonel sayılar kümesi Reel sayılar kümesinde her yerde yoğundur.

Çözüm// i - yapılmayacak.

ii - $A = \{b\}$ $B = \{a, c\}$ $C = \{b, d\}$ (kapanış = kapalı kümeler)

Bu kümelerin kapanışlarını bulmak için bu topolojiye göre kapalı kümeleri bulalım. Yani τ-kapalıları bulalım. (τ' : kapalı kümelerin ailesi)

$\tau' = \{\phi, X, \{b, c, d, e\}, \{a, b, e\}, \{b, e\}, \{a\}\}$

$A = \{b\}$ kapanışını bulalım.

((X, τ) topolojik uzayında $A \subset X$ olsun. $\overline{A} = ?$ $\overline{A} =$ A yı kapsayan en küçük kapalı kümedir.) O halde τ' de en küçük kapalı kümeyi bulmalıyız.

$\overline{A} = \overline{\{b\}} = \{b, e\}$

$\overline{B} = \overline{\{a, c\}} = X$ ($\{a, c\}$ yi içeren en küçük kapalı kümedir.)

$\overline{C} = \overline{\{b, d\}} = \{b, c, d, e\}$

iii - $\overline{B} = \overline{\{a, c\}} = X$ olduğundan $\{a, c\}$, X de her yerde yoğundur.

$\overline{C} = \overline{\{b, d\}} \neq X$ olduğundan $C = \{b, d\}$ kümesi X'de her yerde yoğun değil.

2 - $X = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi üzerine

$\tau = \{\phi, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}$ topolojisini koyalım.

$\overline{A} = [0,1] \cup [4,5]$ } $\Rightarrow A^* = \overline{A} - \mathring{A} = \{0, 1, 4, 5\}$

$A=\{b,c,d\}$ kümesinin içini, dışını, sınırını bulunuz.

Çözüm// ((X,τ) topolojik uzayında $A\subset X$, $\mathring{A}=?$ $\mathring{A}\subseteq A$ dır.)

i- $\underset{\text{nokta}}{a}\in\mathring{A} \Leftrightarrow \exists \underset{\text{açık küme}}{U}\in V(a) : \underset{\text{açık küme}}{U}\subset A$ dır.

$\mathring{A}$ = A tarafından kapsanan en büyük açık alt küme.

$A=\{b,c,d\}$, $\mathring{A}$, birisi olabilir. $\Rightarrow$ $\mathring{A}=b \vee \mathring{A}=c \vee \mathring{A}=d$ olabilir.

$b\in\mathring{A}$ $c\in\mathring{A}$ $d\in\mathring{A}$?

- b yi eleman kabul eden açık kümeler (yani b nin açık komşuluğu) X, $\{b,c,d,e\}$ dir. Bu kümeler $\{b,c,d\}$ nin alt kümesi olmadığından $b\notin\mathring{A}$ olur.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ c\in\{c,d\}\subset A=\{b,c,d\} \Rightarrow c\in\mathring{A} \\ \bullet\ d\in\{c,d\}\subset A=\{b,c,d\} \Rightarrow d\in\mathring{A} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathring{A}=\{c,d\} \text{ olur.}$$

Ödev// Bu topoloji ve küme için, $B=\{a,e,d\}$ kümesinin içini bulunuz.

ii- (A nın dışı ? X−A 'nın içidir.)

$X-A=\{a,e\}$

$(X-A)^{\circ}=?$ $\quad a\in(X-A)^{\circ}$? $\quad a\in\underset{\in\tau}{\{a\}}\subset\{a,e\}\Rightarrow a\in(X-A)^{\circ}$

$e\in(X-A)^{\circ}$? $e\notin(X-A)^{\circ}$ çünkü e'yi içeren hiçbir açık küme X−A nın alt kümesi değildir. O halde,

$(X-A)^{\circ}=\{a\}\Rightarrow$ A nın dışıdır.

iii- $\partial A=A^{*}=\bar{A}-\mathring{A}$

$\bar{A}$ için τ-kapalıları bulalım.

$\tau'=\{\phi, X, \{b,c,d,e\}, \{a,b,e\}, \{b,e\}\}$

$A=\{b,c,d\}\Rightarrow\bar{A}=\{b,c,d,e\}$

$A^{\circ}=\{c,d\}$

$A^{*}=\bar{A}-\mathring{A}=\{b,c,d,e\}-\{c,d\}=\{b,e\}$

3- $X=\{a,b,c,d,e\}$ kümesinin alt kümelerinin,

$\tau=\{\phi, X, \{a\}, \{a,b\}, \{a,b,e\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}\}$

i- (X,τ) topolojik uzay mıdır?

ii- $A=\{c,d,e\}$, $B=\{b\}$ kümelerinin yığılma noktalarının kümelerini bulunuz.

Çözüm // i-

ii- (X, τ) topolojik uzay $A \subset X$ olsun. A', A nın yığılma noktaları kümesi olsun.

$\forall x \in X$, noktası A nın yığılma noktalarının kümesine aitse $x \in A' \iff$

x'in <u>her</u> komşuluğunda A kümesinin x'den farklı en az bir elemanı bulunmasıdır.

$A = \{c, d, e\}$ (Bir kümenin yığılma noktası, o kümenin dışındaki elemanlar da olabilir.) <u>$c \in A'$?</u> c'yi içeren açıklardır.

- $X, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}$ dir.
- $A \cap X = \{c, d, e\}$
- $A \cap \{a, c, d\} = \{c, d, e\} \cap \{a, c, d\} = \{c, d\}$
- $A \cap \{a, b, c, d\} = \{c, d\}$

Dolayısıyla $c \in A'$ olur. Çünkü c'nin her komşuluğunda c'den farklı A'nın elemanı bulundu.

<u>$d \in A'$?</u> d'yi içeren açıklara bakalım

$X, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}$ dir.

$A \cap X = \{c, d, e\}$

$A \cap \{a, c, d\} = \{c, d, e\} \cap \{a, c, d\} = \{c, d\}$

$A \cap \{a, b, c, d\} = \{c, d, e\} \cap \{a, b, c, d\} = \{c, d\}$

Dolayısıyla $d \in A'$ olur. Çünkü d'nin her komşuluğunda d'den farklı A nın elemanı bulundu.

<u>$e \in A'$?</u> e'yi içeren açıklara bakalım.

$X, \{a, b, e\}$ dir.

- $A \cap X = \{c, d, e\}$
- $A \cap \{a, b, e\} = \{c, d, e\} \cap \{a, b, e\} = \{e\}$ e'nin dışında eleman yoktur.

O halde $e \notin A'$ olur.

<u>$a \in A'$?</u> a'yı içeren açıklara bakalım.

$X, \{a\}, \ldots$ dir.

$A \cap \{a\} = \{c, d, e\} \cap \{a\} = \emptyset$ O halde a, A' nün elemanı değildir.

$a \notin A'$ olur. (Tek $\emptyset$ bulmak yeterlidir.)

$b \in A'$?

$A \cap \{a,b\} = \{c,d,e\} \cap \{a,b\} = \phi$ o halde $b \notin A'$

$A' = \{c,d\}$ olur. //

4 − $A \subset B \Rightarrow A' \subset B'$ olduğunu gösteriniz. ((X,τ) topolojik uz. olmak üzere) $A, B \subset X$ olsun.

Bir kümenin alt kümesi için yığılma noktalarının kümesi, üst kümenin yığılma noktalarının alt kümesidir.

Çözüm // $\Rightarrow$: $A \subset B$ olsun. $(A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B)$

$\forall p \in A'$ alalım. $\left(x \in A' \Leftrightarrow \forall V \in \vartheta(x) \text{ için } (V - \{x\}) \cap A \neq \phi \right)$ noktanın yığılma noktasına ait olması.

$\forall U \in \vartheta(p)$ için $(U - \{p\}) \cap A \neq \phi$

$A \subset B$ var $\Rightarrow$ $\underbrace{(U - \{p\}) \cap A}_{\neq \phi} \subset (U - \{p\}) \cap B)$

$\phi \neq A \subset B$ $\exists a \in A$: $a \in B$ $B \neq \phi$

Alt küme boştan farklı olduğundan kümenin öyle bir a elemanı vardır ki kapsama özelliğinden,

$(U - \{p\}) \cap B \neq \phi \Rightarrow p \in B' \Rightarrow A' \subset B'$

5 − (X,τ) bir noktasal topolojik uzay $A \subset X$ ise $A' = \phi$ olduğunu gösteriniz.

Not: Noktasal topolojik uzayında her kümenin yığılma noktaları kümesi boş kümedir.

Çözüm // $A \subset X$ olsun. $A' = \phi$?

$\left\{ \begin{array}{l} \forall U \in \vartheta(x) \text{ için, } U \cap A = \{x \text{ den farklı noktalar}\} \Leftrightarrow \\ x \in A' \Rightarrow \forall U \in \vartheta(x) \text{ için } (V - \{x\}) \cap A \neq \phi \text{ olur.} \end{array} \right\}$

(X,τ) noktasal topolojik uzayında $\forall p \in X$ alalım. Noktasal topolojik uzayında her tek nokta kümesi açık olduğundan, aynı zamanda tek nokta kümesini noktanın komşuluğu olarak düşünebiliriz.

(Noktasal topolojik uzayında her tek nokta kümesi hem açık hem de kapalıdır.)

$p \in \{p\}$ olduğundan $\{p\}$ tek nokta kümesi p nin komşuluğudur.

$\{p\} \cap A = \{p\}$ $\{p\}$, A için yığılma noktası değildir.

(yığılma noktası tanımından $A' = \phi$ olur.) Bunu her nokta için yapabiliriz.

Ödev// $X=\{a,b,c,d\}$ $A=\{a,b,c\}$ olsun. X uzayı üzerine konulan τ-noktasal topolojiye göre A kümesinin yığılma noktalarının kümesini bulunuz. $A\subset X$ dir.

Ödev// yığılma noktalarının tanımını kullanarak $A'=\emptyset$ olduğunu gösterin.

6 – (X,τ) kaba topolojik uzay, $A\subset X$, $A\neq\emptyset$ ve $A\neq X$ olsun.

$A^{\circ}=?$ dış$A=?$ $\partial A=A^{*}=?$

Çözüm// $\tau=\{\emptyset,X\}$ dir. (kaba top. uz. özelliği)

$A\neq X$, $A\neq\emptyset$

$A^{\circ}\subset A$ (o kümeyi içinde bulunduran en büyük açık küme içi verir.)

Bir kümenin içi : o küme tarafından kapsanan en büyük açık küme olduğuna göre;

$A^{\circ}=\emptyset \Rightarrow \emptyset\subset A$ olduğundan. $A\neq X$ olduğundan.

- $A^{\circ}\neq X$ ve $X\not\subset A$ olur. $A^{\circ}=\emptyset$ dir. //

dış$A=(\underbrace{X-A}_{B})^{\circ}$ olduğuna göre,

- $A\neq\emptyset$ olduğunda $A\neq X$, $X-A\neq\emptyset$

$X-A$ tarafından kapsanan en büyük açık alt küme boş kümedir. O halde $(X-A)^{\circ}=$ dış$A=\emptyset$ olur.

- $\partial A=A^{*}=\underline{\overline{A}-A^{\circ}}$

$\overline{A}$; A yı kapsayan en küçük kapalı küme.

(kapanış = kapalı küme) $\tau_k=\{X,\emptyset\}$ (τ tümleyenleri) $A\subset X$ olduğundan

$\overline{A}=X$ dir. $\partial A=A^{*}=\overline{A}-A^{\circ}=X-\emptyset=X$ //

7 – τ_1,τ_2 ; X kümesi üzerinde iki topoloji, $\tau_1\subset\tau_2$ ve $A\subset X$ olsun. Bu taktirde aşağıdakileri gösteriniz:

i – A kümesinin her τ_2-yığılma noktasının aynı zamanda A'nın τ_1-yığılma noktası olduğunu gösteriniz.

ii – öyle bir τ_1 topolojik uzayı bulunuz ki, bu uzaydaki τ_1 yığılma noktası, τ_2 yığılma noktası olmasın.

Çözüm // i- İnce topolojiye göre yığılma noktası olan her nokta, kaba topolojiye göre yığılma noktasıdır.

ii- Kaba topolojiye göre yığılma noktası olan nokta, ince topolojiye göre yığılma noktası olmayabilir.

i- $\tau_1 \subset \tau_2$ olsun.

$\forall x \in A'$ olsun. τ_2-topolojisine göre,

$\forall U \in \mathcal{V}(x)$ için ya da $x \in U \in \tau_2$ açığı için

$(U - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ olur.

τ_1 topolojisine göre $\underset{(x \in V,\ V \in \tau_1)}{\forall V \in \mathcal{V}(x)}$ için $(V - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$?

$x \in V$ ve $V \in \tau_1$ olduğunda $\tau_1 \subset \tau_2$ olmasından dolayı $V \in \tau_2$ dir.

τ_2 de x'in her komşuluğu için $(V - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ özelliği sağlanır.

τ_1 topolojisine göre $x \in A'$ olur.

ii- (i-in tersinin olmadığını göstermeliyiz. Bunun için bir örnek yeterlidir.)

$X = \mathbb{R}$ alalım. $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\} \subset \mathbb{R}$ olsun.

$\mathbb{R}$ üzerine, τ_1-olarak mutlak değer metrik (alışılmış) topolojiyi,

τ_2-olarak noktasal topolojiyi koyalım.

$\tau_1 \subset \tau_2$ dir.

A kümesinin noktasal topolojiye göre yığılma noktası kümesi $A' = \emptyset$ tur.

(Bir kümenin noktasal topolojiye göre yığılma noktası kümesi $\emptyset$ olur.)

τ_1 topolojisine göre A'nın yığılma noktası $\{0\}$ dır. (sıfır kümesidir)

8- $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi olsun. $\mathbb{N}$ üzerine $\tau = \{\emptyset, \mathbb{N}, E_n = \{n, n+1, \ldots\}\ n \in \mathbb{N}\}$ topolojisi konuluyor. (Açıklar, $\emptyset$, $\mathbb{N}$ ve E_n dir.)

i- Bu topolojiye göre $\mathbb{N}$ kümesinin kapalı kümelerini bulunuz.

ii- $A = \{7, 24, 47, 85\}$ $B = \{3, 6, 9, 12, \ldots\}$ kümelerinin kapanışlarını bulunuz.

iii- $\mathbb{N}$ nin heryerde yoğun alt kümelerini bulunuz.

Çözüm // i- τ topolojisine göre $\mathbb{N}$ kümesinin kapalıları $\mathbb{N}$ kümesine göre açık kümelerin tümleyenidir. $\mathbb{N}, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \underset{E_4 \text{ için}}{\{1,2,3\}}, \ldots, \{1,2,\ldots,m\}$ dir.

ii- kapalı kümeleri E' ile gösterelim. (Açıkların tümleyenini alarak)

En küçük kapalı küme,

$\{1,2,3,\dots,85\} = \overline{A}$ $\overline{B} = \{1,2,3,\dots\} = \mathbb{N}$ dir.

iii- (Her yerde yoğun = kapanışı o kümeye eşit)

$\mathbb{N}$ kümesinin sınırsız ya da sonsuz alt kümesi $\mathbb{N}$' de her yerde yoğundur.

Yani kapanışı $\mathbb{N}$'ye eşittir.

Eğer sonlu ya da sınırlı alt küme ise $\mathbb{N}$ de her yerde yoğun değildir.

62/1- τ ve τ^*, X kümesi üzerinde iki topoloji; β ve β^* da sırasıyla bunların birer topoloji tabanı olsun.

Eğer her $B\in\beta$ için, β^* tabanının birleşimi olarak yazılıyorsa, τ topolojisinin τ^* dan kaba olacağını gösteriniz. ($\tau\subset\tau^*$ dır.) ?

Çözüm// $\forall U\in\tau$ için $U\in\tau^*$?

$\forall U\in\tau \Rightarrow U=\bigcup_{i\in I}\beta_i$ olur. $\beta_i\in\beta$

β, τ nun topoloji tabanı olduğundan, U, β nın bazı elemanlarının birleşimi olarak yazılabilir. Ayrıca

$\forall\beta_i\in B \Rightarrow \beta_i=\bigcup_{i\in J}\beta_i$ olacak şekilde

$\beta_i\in\beta^*$ vardır $\Rightarrow \beta_i^*\subset\beta_i\subset U$ olduğundan $U=\bigcup_{i\in J}\beta_i$ dur.

$\beta_i^*\subset\beta^*$ ve β^* da τ^* ın topoloji tabanı olduğundan $U\in\tau^*$ dır.

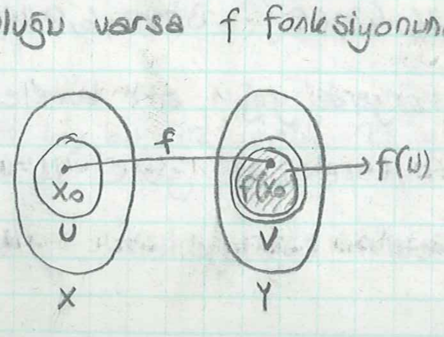
O halde $\tau\subset\tau^*$ olur.

2.4. Süreklilik ve Homeomorfizm

Bir Noktada Süreklilik.

2.4.1. Tanım: X,Y iki topolojik uzay, $f: X\to Y$ bir fonksiyon ve $X_0\in X$ olsun.

Eğer, $f(X_0)$ noktasının her V komşuluğu için $f(U)\subset V$ olacak şekilde X_0 noktasının bir U komşuluğu varsa f fonksiyonuna bu X_0 noktasında süreklidir denir.



(f ; x_0 noktasında süreklidir) $\Leftrightarrow$ ($\forall V$, $V \in \vartheta(f(x_0))$ $\exists U \in \vartheta(x_0)$: $f(U) \subseteq V$)

2.4.1. Teorem: X, Y iki topolojik uzay, $f: X \to Y$ bir fonksiyon, $x_0 \in X$ olsun. Bu taktirde, aşağıdaki özellikler denktir.

1- f, x_0 noktasında süreklidir.

2- $f(x_0)$ noktasının her V komşuluğu için $f^{-1}(V)$ kümesi de x_0 noktasının bir komşuluğudur.

İspat// 1- ($1 \Rightarrow 2$) $\forall V \in \vartheta(f(x_0))$ için $f(U) \subset V$ olacak şekilde bir $U \in \vartheta(x_0)$ komşuluğu vardır.

$f^{-1}(f(U)) = U \subset f^{-1}(V)$ yani $x_0 \in \underset{\text{komşuluk}}{U} \subset f^{-1}(V)$

O halde $f^{-1}(V) \in \vartheta(x_0)$ dır.

($f^{-1}(V)$, x_0 noktasının bir komşuluğudur.)

2- ($2 \Rightarrow 1$) $\forall V \in \vartheta(f(x_0))$ için $f^{-1}(V) \in \vartheta(x_0)$ dır. (kabulden dolayı)

$U = f^{-1}(V)$ diyelim. $\Rightarrow$ $f(U) = f(f^{-1}(V)) \subset V$

$U \in \vartheta(x_0)$ (kabulden)

O halde f, x_0 noktasında süreklidir. (Tanımdan dolayı)

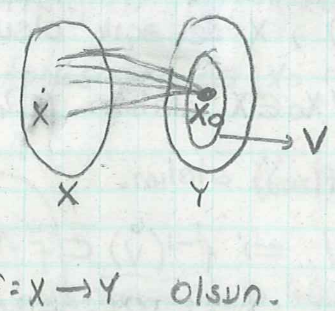
Uyarma// Bir noktada süreklilik yerel (lokal) bir kavramdır. Yani bir fonksiyon bir noktada sürekli olduğu halde, başka bir noktada süreksiz olabilir.

Örnek// X, Y iki topolojik uzay, $f: X \to Y$

$x \to f(x) = x_0$ biçiminde bir sabit fonksiyon olsun. $\forall V \in \vartheta(f(x_0))$ komşuluğu alalım.

$f^{-1}(V) = X \in \tau$

bu fonksiyon tüm X'de süreklidir.



Süreklilik

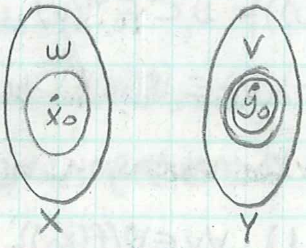
2.4.2. Tanım: X ve Y iki topolojik uzay, $f: X \to Y$ olsun.

Eğer f fonksiyonu, X tanım kümesinin her noktasında sürekliyse bu f fonksiyonuna X kümesinin her noktasında süreklidir, veya kısaca süreklidir denir. (Bir önceki örnekteki fonksiyon, tanım kümesinin her noktasında sürekli olduğundan süreklidir.)

2.4.2. Teorem: X ve Y iki topolojik uzay, $f: X \to Y$ içine bir fonksiyon olsun. f nin, X üzerinde sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul, Y'deki her V açık kümesinin $f^{-1}(V)$ ters görüntüsünün X'de açık olmasıdır.

İspat // $\Rightarrow$: Kabul edelim ki f sürekli ve V'de Y'de herhangi bir açık alt küme olsun. V kendi içindeki her noktanın bir komşuluğudur. Bu taktirde $f^{-1}(V)$ de, kendi içindeki her noktanın bir komşuluğudur.

$\exists x_0 \in f^{-1}(V)$ vardır öyle ki, $\forall U \in \mathcal{U}(x_0)$ için $U \not\subset f^{-1}(V)$ olur.
$(x_0 = f^{-1}(y_0) \quad y_0 \in V)$



f sürekli ve $V \in \mathcal{U}(y_0)$

$\exists W \in \mathcal{U}(x_0): f(W) \subset V$

W, x_0 ın bir komşuluğu ise

x_0'ın $U \subset W$ olacak şekilde bir açık komşuluğu vardır.

$\Rightarrow f(U) \subset f(W) \subset V$

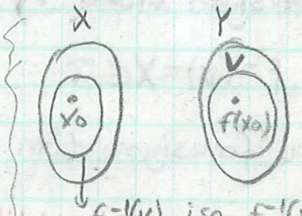
$\Rightarrow f^{-1}(f(U)) \subset f^{-1}(f(W)) \subset f^{-1}(V)$

$\underset{U}{\parallel} \Rightarrow U \subset f^{-1}(V)$

O halde $f^{-1}(V)$, kendi içindeki her noktanın bir komşuluğudur. Yani açıktır.

$\Leftarrow$: Kabul edelim ki, Y kümesindeki her V açık alt kümesi için $f^{-1}(V)$, X'de açık olsun.

$\forall x_0 \in X$ alalım. (2.4.1. Teoremi kullanalım.)



$f^{-1}(V)$ ise $f^{-1}(V) \in \mathcal{U}(x_0)$

$\forall V \in \mathcal{U}(f(x_0))$ alalım.

$\underset{\text{açık}}{\overset{\circ}{V}} \subset V \Rightarrow \underbrace{f^{-1}(\overset{\circ}{V})}_{\text{açık}} \subset f^{-1}(V)$

$x_0 \in f^{-1}(\overset{\circ}{V}) \subset f^{-1}(V)$

O halde $f^{-1}(V) \in \mathcal{U}(x_0)$ (2.4.1. Teoreminden dolayı)

f, x_0 noktasında süreklidir. Bu x_0 herhangi bir nokta olduğundan fonksiyon tüm X kümesinde süreklidir, kısaca süreklidir.

2.4.3. Teorem: X, Y iki topolojik uzay, f'de X den Y içine bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul, Y deki her B kapalı alt kümesinin $f^{-1}(B)$ ters görüntüsünün X'de kapalı olmasıdır.

İspat // $\Rightarrow$: Kabul edelim ki, f sürekli ve B'de Y nin kapalı bir alt kümesi olsun. $(B \in Y)$

B kapalı $\Rightarrow$ $Y-B$ açıktır.

$$\underbrace{f^{-1}(Y-B)}_{\text{açık}} = \underbrace{f^{-1}(Y)}_{X} - f^{-1}(B) = \underbrace{X - f^{-1}(B)}_{\text{açık}}$$

O halde $X-(X-f^{-1}(B)) = f^{-1}(B)$ kapalıdır.

$\Leftarrow$: Kabul edelim ki, Y'deki her B kapalı alt kümesinin $f^{-1}(B)$ ters görüntüsü X'de kapalı olsun. f sürekli olduğunu gösterelim.

Bunun için 2.4.2. Teoremini kullanalım. (Kabul edelim ki, $f^{-1}(B)$ kapalıdır.)

V, Y'de herhangi bir açık alt küme olsun. $f^{-1}(V)$ açıktır. Gösterelim.

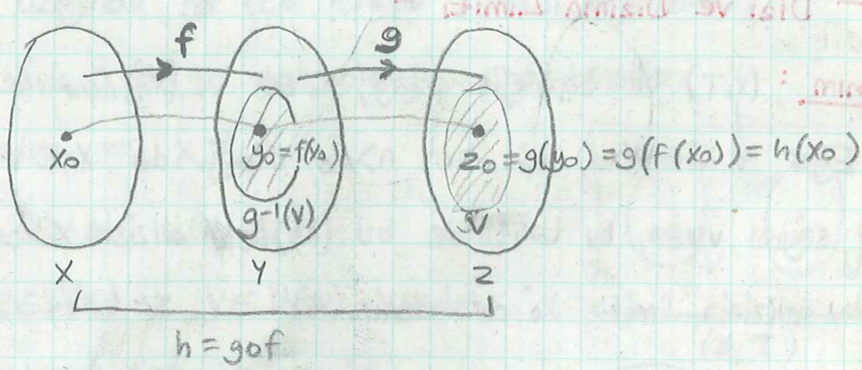
$\underset{\text{kapalı}}{B = Y-V} \Rightarrow Y-B = Y-(Y-V) \Rightarrow Y-B = V$

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(Y-B) = f^{-1}(Y) - f^{-1}(B) = \overbrace{X - \underset{\text{kapalı}}{f^{-1}(B)}}^{\text{açık}}$$

O halde $f^{-1}(V)$ açık, $f^{-1}(B)$ kapalı ve f süreklidir. //

2.4.4. Teorem: X, Y, Z topolojik uzaylar; f, X'den Y içine; g, Y'den Z içine iki fonksiyon ve $h = g \circ f$ olsun. $x_0 \in X$ için $y_0 = f(x_0)$ $z_0 = g(y_0) = g(f(x_0)) = h(x_0)$ diyelim. Eğer f fonksiyonu x_0 noktasında, g fonksiyonu y_0 noktasında sürekliyse, h fonksiyonu da x_0 noktasında süreklidir.

İspat //



$\forall V \in \mathcal{U}(z_0)$ alalım. $h^{-1}(V) \in \mathcal{U}(x_0)$ olduğunu gösterelim. (2.4.1. Teorem 2.)

g, y_0 da sürekli olduğundan dolayı $g^{-1}(V) \in \mathcal{V}(y_0)$

f, x_0 da sürekli " " $f^{-1}(g^{-1}(V)) = h^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x_0)$

$\Rightarrow$ h, x_0 da süreklidir.

Özel olarak, f fonksiyonu X üzerinde ve g fonksiyonu Y üzerinde sürekli ise $h = g \circ f$ bileşke fonksiyonu da X üzerinde süreklidir.

Homeomorfizm (Topolojik Eşyapı Dönüşümü)

2.5.1. Tanım: X ve Y iki topolojik uzay, $f: X \to Y$ birebir ve örten bir fonksiyon olsun. Eğer f ve f^{-1} sürekliyse bu f fonksiyonuna bir homeomorfizm, X ve Y topolojik uzaylarına da homeomorfturlar denir.

İki uzay arasında homeorfizm varsa, bu iki uzaydaki özellikler aynıdır. Yani bu iki uzay birbirinin aynıdır.

2.5.1. Teorem: X ve Y iki topolojik uzay, $f: X \to Y$, birebir ve örten bir fonksiyon olsun. Bu taktirde aşağıdaki özellikler eşdeğerdir.

1- Y'nin kapalı her F alt kümesi için $f^{-1}(F)$ kümesi ve X'deki her kapalı, K alt kümesi için $f(K)$ kümesi kapalıdır.

2- f ve f^{-1} süreklidir.

3- f bir homeomorfizmdir.

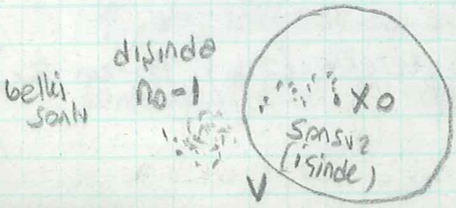
ispat// $2 \Leftrightarrow 3$ (homeomorfizm tanımından)

$1 \Leftrightarrow 2$ (2.4.3 teoreminden) $f^{-1}(F)$ $\underset{K \text{ kapalı}}{f^{-1}: Y \to X}$ $\underbrace{(f^{-1})^{-1}(K)}_{\text{kapalı.}} = f(K)$

$\Rightarrow 1 \Leftrightarrow 3$

- Dizi ve Dizinin Limiti -

2.6.1. Tanım: (X, τ) bir topolojik uzay, $x_0 \in X$ ve $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de bu uzayda bir dizi olsun. Eğer $\forall V \in \mathcal{V}(x_0)$ için her $n > n_0$ olduğunda $x_n \in V$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı varsa, bu taktirde bu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi x_0 noktasına yakınsıyor veya bu dizinin limiti x_0 dır denir.



Bu tanıma göre V komşuluğunun içinde sonsuz, dışında belki sonlu tane eleman var.

Bu x_0 noktasına, bu dizinin limiti denir.

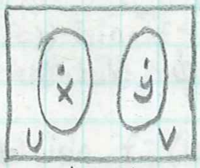
Uyarı // Bir dizinin limiti birden fazla olabilir. Örnek olarak;

(X,τ) bir kaba topolojik uzay olsun. $\tau=\{X,\phi\}$ ve $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de bu uzayda bir dizi olsun.

$\forall x\in X$ alalım. X in her noktası bu dizinin bir limit noktasıdır.

(x'in komşuluğu X olur.)

2.6.2. Tanım: Bir (X,τ) topolojik uzayı verilsin. Herhangi farklı $x\in X$ ve $y\in X$ verildiğinde $U\cap V=\phi$ olacak şekilde $U\in\mathcal{V}(x)$ ve $V\in\mathcal{V}(y)$ komşulukları varsa bu X uzayına <u>Hausdorff uzayı (T_2 uzayı)</u> denir.


(X,τ)

$U\cap V=\phi$ (T_2 uzayı – Hausdorff uzayı)

Örnek // 1- $\mathbb{R}$ de, $d(x,y)=|x-y|$ mutlak değer metriği bir Hausdorff uzayıdır.

2- $\mathbb{R}^n$, de noktasal topolojiyi koyalım. (tek nokta kümesi hem açık, hem kapalıdır.)

$$\forall x,y\in\mathbb{R}^n,\ x\neq y\quad \left.\begin{array}{l} x\in\{x\}\in\mathcal{V}(x)\\ y\in\{y\}\in\mathcal{V}(y)\end{array}\right\}\ \{x\}\cap\{y\}=\phi$$

O halde noktasal topolojiye göre $\mathbb{R}^n$ bir Hausdorff uzayıdır.

3- $\mathbb{R}^n$, de τ-kaba topolojisini koyalım. $\tau=\{\mathbb{R}^n,\phi\}$

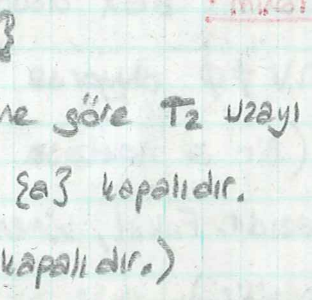
$\forall x,y\in\mathbb{R}^n$, $\forall x\neq y$, $\mathbb{R}^n$, τ-kaba topolojisine göre T_2 uzayı değildir.

2.6.1. Teorem: X bir Hausdorff uzayı ise her $a\in X$ için $\{a\}$ kapalıdır.

İspat // (Hausdorff uzayında her tek nokta kümesi kapalıdır.)

Teoremin ispatı için $X-\{a\}$ nın açık olduğunu gösterelim.

$\forall x\in X-\{a\}$ alalım. $\Rightarrow x\neq a$


(X,τ)

X, T_2 uzayı olduğundan $U\cap V=\phi$ olacak şekilde $U\in\mathcal{V}(x)$ ve $V\in\mathcal{V}(a)$ vardır.

$a\notin U$, $\{a\}\cap U=\phi \Rightarrow U\subset X-\{a\}$

$x\in U\subset X-\{a\} \Rightarrow X-\{a\}\in\mathcal{V}(x)$

x keyfi bir nokta, o halde $X-\{a\}$ kendi içindeki her noktanın bir komşuluğudur. (2.1.2 teoremden dolayı)

$X-\{a\}$ açıktır. $\Rightarrow$ $\{a\}$ kapalıdır. //

2.6.2. Teorem : X bir Hausdorff uzayı olsun. Eğer $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, X'de yakınsak bir dizi ise limit noktası tektir.

İspat// (Olmayana ergi metodu)

Kabul edelim ki bu dizinin a, b gibi $(a\neq b)$ iki limit noktası olsun.

X bir Hausdorff $\Rightarrow U\cap V=\emptyset$ o.ş. $U\in\mathcal{V}(a)$, $V\in\mathcal{V}(b)$ komşulukları vardır.

$x_n\to a \Rightarrow \exists n_0\in\mathbb{N}$, $\forall n\geq n_0$ için $x_n\in U$ olur.

$x_n\to b \Rightarrow \exists m_0\in\mathbb{N}$, $\forall n\geq m_0$ için $x_n\in V$ olur.

$p_0=\text{mak}\{n_0, m_0\}$

O halde, $\forall n\geq p_0$ için $\left.\begin{matrix} x_n\in U \\ x_n\in V\end{matrix}\right\} \Rightarrow x_n\in U\cap V\neq\emptyset$ olur. Bu ise çelişkidir.

$U\cap V=\emptyset$ olmalıydı. O halde $a=b$ dir.

Bir Dizinin Değme Noktası

(X,τ) bir topolojik uzay, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, X'de bir dizi olsun.

$A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ $\qquad \forall n\in\mathbb{N}$,

$A_n=\{a_n, a_{n+1}, \ldots\}$ diyelim.

2.6.3. Tanım: $a\in X$ olsun. Eğer a noktasının her V komşuluğu ve $\forall A_n$ için $A_n\cap V\neq\emptyset$ oluyorsa a noktasına, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin değme noktası denir.

(Bir a noktası dizinin değme noktası ise A kümesinin de değme noktasıdır. Fakat, kümenin bir değme noktası ise dizinin değme noktası olmayabilir.)

Örnek// $A=\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$ dizisini alalım. 0 noktası değme noktasıdır.

0, $\forall V\in\mathcal{V}(0)$ ve $\forall A_n$ için $V\cap A_n\neq 0$ yani 0, bu dizinin değme noktasıdır.

Tanım: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin değme noktalarının kümesi D olsun.

$D=\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{A_n}$ olur. Buna $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin değmesi denir.

Yukarıdaki örnekte $D=\{0\}$ olur.

$\overline{A}=\{0, 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\} \Rightarrow D\neq\overline{A}$ $(D\subset\overline{A}$ fakat tersi doğru değil$)$

Uygulama :

1- $X=\{a,b,c,d\}$ kümesi üzerinde bir τ topolojisi

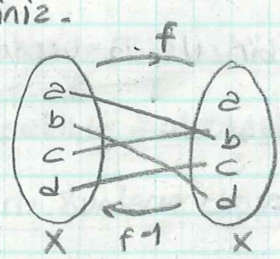
$\tau=\{X,\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{b,c,d\}\}$ biçiminde ve bir $f: X \to X$

fonksiyonu da $f(a)=f(c)=b$, $f(b)=d$ ve $f(d)=c$ olacak şekilde

tanımlanıyor. c ve d noktalarında f fonksiyonunun sürekli olduğunu

gösteriniz.

$\left\{ \begin{array}{l} f: X \to Y \\ x \to f(x) = y \in Y \end{array} \right.$



$f:(X,\tau) \to (Y,\tau')$

$\forall x_0 \in X$ sürekli $\iff$

★ i- $\forall V \in \mathcal{U}(f(x_0))$ için — görüntü uzayındaki komşuluk

$U \in \mathcal{U}(x_0)$ vardır.

$f(U) \subset V$ o.ş. $U \in \mathcal{U}(x_0)$ vardır.

★ ii- $\forall V \in \mathcal{U}(f(x_0))$ için

$f^{-1}(V) \in \mathcal{U}(x_0)$ olmasıdır.

c, de süreklilik ;

$\underbrace{\forall V \in \mathcal{U}}_{\text{her komşuluk için}}(f(c))$ için $f^{-1}(V) \in \mathcal{U}(c)$?

$\forall V \in \mathcal{U}(b)$ için $f^{-1}(V) \in \mathcal{U}(c)$? $\left\{ \begin{array}{l} \text{b nin komşuluklarını bul, tersini al ve} \\ \text{bunlar c nin komşuluğu mudur? bakalım} \end{array} \right)$

- $X, \{a,b\}, \{b\}, \{b,c,d\}$ açık komşuluklardır. (b'yi içerirler.)

- $f^{-1}(\{b\}) = \{a,c\}$ bu komşuluk c'yi içermeli ve açık olmalı.

bu komşuluk c yi içerir fakat $\{a,c\} \notin \tau$ dur, açık değildir.

Yani $\{a,c\}$, c noktasının komşuluğu değildir. Sürekli değildir.

d 'de süreklilik ;

$\forall V \in \mathcal{U}(f(d))$ için $f^{-1}(V) \in \mathcal{U}(d)$?

$\forall V \in \mathcal{U}(c)$ için $f^{-1}(V) \in \mathcal{U}(d)$?

- $X, \{b,c,d\}$

- $f^{-1}(X) = X$, X kümesi d'yi içerir ve açıktır. $X \in \mathcal{U}(d)$ dir. $X \in \tau$ dur.

$f^{-1}(\{b,c,d\}) = \{a,c,d,b\} = X$ d'yi içerir, açıktır.

O halde d noktasında f fonksiyonu süreklidir.

Ödev // Yukarıdaki fonksiyonun a ve b noktalarında, sürekli olup olmadığını

gösteriniz.

12- $(X,\tau_1),(Y,\tau_2)$ iki topolojik uzay, $f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ sürekli olmayan bir fonksiyon olsun. X üzerindeki τ_1^* topolojisi τ_1 den kaba ve Y üzerindeki τ_2^* topolojisi de τ_2 den ince ise bu taktirde $f:(X,\tau_1^*)\to(Y,\tau_2^*)$ sürekli değildir. Gösteriniz.

iii-($f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ sürekli $\Leftrightarrow \forall U\in\tau'$ için $f^{-1}(U)\in\tau$ olmasıdır.)

Çözüm// $f\,(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ sürekli olmadığından öyle bir $U\in\tau_2$ vardır ki $f^{-1}(U)\notin\tau_1$ dır. (süreklilik tanımından)

$U\in\tau_2$ old. göre ve $\tau_2\subset\tau_2^* \Rightarrow U\in\tau_2^*$ dır.

$f^{-1}(U)\notin\tau_1$ ve $\tau_1^*\subset\tau_1 \Rightarrow f^{-1}(U)\in\tau_1^*$ o halde

f fonksiyonu da sürekli değildir. ($f:(X\to\tau_1^*)\to(Y,\tau_2^*)$ sürekli değildir.)

3- $f:X\to Y$ fonksiyonu $a\in X$ noktasında sürekli bir fonksiyon olsun. Bu taktirde f, dizisel sürekli bir fonksiyondur.

(Dizisel Süreklilik: $(a_n)\in X$, $a_n\to a \Rightarrow f(a_n)\to f(a)$ dır. f fonksiyonu için)

(f sürekli ve $a_n\to a$ ise $f(a_n)\to f(a)$ old. gösteriniz şeklinde sorulabilir.)

Çözüm// f, a noktasında sürekli ise $\forall V\in\mathcal{U}(f(a))$ için $f(U)\subset V$ o.ş. $U\in\mathcal{U}(a)$ vardır.

$\underline{a_n\to a}$ iken $f(a_n)\to f(a)$? Gösterelim.

$\forall n\geq n_0$, $\underset{f\text{ fonk. gör. alırsak.}}{\underline{a_n\in U}}$ o.ş. $n_0\in\mathbb{N}$ vardır.

Yakınsaklık: (X,τ) da $(x_n)\subset X$ $x_n\to x$ $\forall U\in\mathcal{U}(x)$ için $\forall n\geq n_0$ old. $x_n\in U$ o.ş. de $n_0\in\mathbb{N}$ vardır.

$n_0\in\mathbb{N}$ için $f(a_n)\in f(U)\subset V$

$\Rightarrow f(a_n)\in V$

V, $f(a)$ nın komşuluğu olduğundan $\Rightarrow f(a_n)\to f(a)$ olur. //

(Noktada süreklilik ve yakınsaklık tanımlarını kullanarak.)

4- $(X,\tau),(X,\tau^*)$ iki topolojik uzay, $I:(X,\tau)\to(X,\tau^*)$ olsun. Gösteriniz ki, I'nın sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul, $\tau^*\subset\tau$ (τ^*, τ'dan kaba) olmasıdır.

Çözüm// $\Rightarrow$: I sürekli olsun. $\Rightarrow$

$\forall U\in\tau^*$ için $I^{-1}(U)=U\in\tau$ olur. (süreklilikten) $\Rightarrow \tau^*\subset\tau$ olur.

$\Leftarrow$: Tersine, $\tau^* \subset \tau$ olsun. $\Rightarrow \forall U \in \tau^*$ için $U \in \tau$ dur.

I nın sürekliliği için $\forall U \in \tau^*$ için $I^{-1}(U) = U \in \tau$ olup, I süreklidir.

6 – (X,τ) topolojik uzay, $\{a\}$ tek nokta kümesi de bu uzayda bir açık alt küme olsun. Y herhangi bir topolojik uzayı göstermek üzere her $f: X \to Y$ için f nin a noktasında sürekli olduğunu gösteriniz.

(Tek nokta kümesini Hausdorff uzayında açık olarak alabiliriz, Aynı şekilde noktasal topolojiye göre tek nokta kümesini açık olarak alabiliriz. Bunların dışında tek nokta kümesi açık değildir.)

Çözüm// f, a noktasında sürekli olması için $\forall V \in \mathcal{V}(f(a))$ için $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(a)$ olmalıdır. $V \in \mathcal{V}(f(a))$ ise $f(a) \in V \Rightarrow a \in f^{-1}(V)$ dir.

$\{a\} \subset f^{-1}(V) \Rightarrow a \in \underbrace{\{a\}}_{\text{açık}} \subset f^{-1}(V) \Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(a)$ dır.

$\{\{a\} \subset f^{-1}(V)\}$
$\{a \in A \Rightarrow \{a\} \subset A\}$

($V \in \mathcal{V}(a) \Rightarrow a \in U \subset V$ o.ş. U açığı vardır. Açık komşuluk tanımı)

O halde f süreklidir.

7 – Her (X,d) metrik uzayı bir T_2 (Hausdorff) uzayıdır. Gösteriniz.

Çözüm// ((X,τ) bir Hausdorff uzay $\Leftrightarrow \forall x,y \in X$, $x \neq y$ $U \cap V = \emptyset$ o.ş. $U \in \mathcal{V}(x)$, $V \in \mathcal{V}(y)$ olmasıdır.)

$\forall\, x \neq y \in X$ için $B(x,\frac{r}{3}) \in \mathcal{V}(x)$
$B(y,\frac{r}{3}) \in \mathcal{V}(y)$

{metrik uzayda x'in komşuluğu, $B(x,\frac{r}{3})$ olur.}
{y nin komşuluğu $B(y,\frac{r}{3})$ olur.}

$B(x,\frac{r}{3}) \cap B(y,\frac{r}{3}) = \emptyset$?

Kabul edelim ki, arakesit $\emptyset$ olmasın. Öyle bir $a \in B(x,\frac{r}{3})$ ve $a \in B(y,\frac{r}{3})$ olur.

$d(x,y) = r$ olsun. $r > 0$ $\{x \neq y$ olduğundan$\}$

$$\left.\begin{aligned} a \in B(x,\tfrac{r}{3}) &\Rightarrow d(a,x) < \tfrac{r}{3} \\ a \in B(y,\tfrac{r}{3}) &\Rightarrow d(a,y) < \tfrac{r}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,y)$$

$$r < \frac{r}{3} + \frac{r}{3} = \frac{2r}{3}$$

$r < \frac{2r}{3}$ olup çelişkidir.

O halde, arakesit $\emptyset$ olur. Öyle ise metrik uzay Hausdorff uzayıdır.

((X,d) metrik uzayında $\forall a \neq b \in X$ için $U \cap V = \emptyset$ o.ş. a yı içeren U açığı ve b'yi içeren V açığı bulunuz, şeklinde sorulabilir.)

5 - $A=[a,b]$ ve $I=[0,1] \subset \mathbb{R}$ kapalı aralıklarının homeomorf old. gösteriniz.

($\mathbb{R}$ uzayında çözelim.)

Çözüm// İki uzayın birbirine homeomorf olması için, uzaylar arasında bir homeomorfizmin tanımlanması gerekir. (Birebir, örten, ve tersi de sürekli ise)

$f: A \to I$
$x \to f(x)=(b-a)x+a$ şeklinde tanımlansın. Bu fonksiyonun homeomorfizm olduğunu gösterelim.

- f, 1:1 dir.? $x \neq y$ için $f(x) \neq f(y)$ olmalı.

$$x \neq y \Rightarrow (b-a)x \neq (b-a)y \Rightarrow (b-a)x+a \neq (b-a)y+a$$

$\Rightarrow f(x) \neq f(y)$ birebirdir.

- f, örten dir ? $\forall y \in I$ için $f(x)=y$ olacak şekilde bir $x \in A$ olmalı.

$$\Rightarrow f(x)=(b-a)x+a=y \Rightarrow x=\frac{y-a}{b-a} \in A$$ o halde örtendir.

- f sürekli ?

Hem I, hem de A kapalı aralıkları üzerinde mutlak değer metriği, ya da alışılmış topoloji vardır.

$\forall \varepsilon>0$ için $\forall x,x' \in A$ için $|x-x'|<\delta$ old. $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$?

$$|f(x)-f(x')| = |(b-a)x+\cancel{a}-(b-a)x'-\cancel{a}| = |(b-a)(x-x')|$$
$$= |b-a||x-x'| < |b-a|.\delta$$

$\delta=\frac{\varepsilon}{|b-a|}$ seçersek, $<\varepsilon$ olur. f süreklidir.

- f^{-1} sürekli ? $\delta=\varepsilon|b-a|$ olur. //

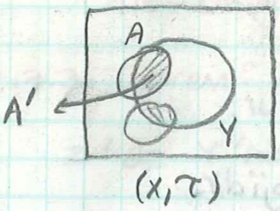
Bir Topolojik Uzayın Alt Uzayları

X bir topolojik uzay $Y \subset X$ olsun. Y üzerine birçok topoloji konulabilir. Bunlardan $Y \xrightarrow{I} X$ Birim fonksiyonunu sürekli yapan topolojilerle ilgileneceğiz.

2.7.1. Teorem : (X,τ) bir topolojik uzay, $Y \subset X$ olsun.

Bu taktirde Y nin alt kümelerinin

$\tau_Y=\{A' \mid A'=A\cap Y, \forall A \in \tau\}$ ailesi Y üzerinde bir topolojidir.



τ_Y ailesi Y üzerinde bir topolojidir.

ispat// i- $\phi \in \tau_Y$, $Y \in \tau_Y$?

$\phi \cap Y = \phi \Rightarrow \phi \in \tau_Y$ // $X \in \tau$, $Y \subset X \Rightarrow Y \in \tau_Y$ // $(Y \cap X = Y)$

ii- $(A_i')_{i\in J} \subset \tau_Y$ yani, $\forall A_i' \in \tau_Y$ olsun. (J sonlu elemanlı)

$\bigcap_{i\in J} A_i' \in \tau_Y$?

$\Rightarrow \forall A_i' \in \tau_Y \Rightarrow \exists A_i \in \tau$, $A_i' = A_i \cap Y$ olur.

$\bigcap_{i\in J} A_i' = \bigcap_{i\in J} (A_i \cap Y) = \underbrace{(\bigcap_{i\in J} A_i)}_{\in \tau} \cap Y \in \tau_Y$ // $\bigcap A_i' \in \tau_Y$ dir.

iii- τ_Y'nin herhangi sayıda $(A_i')_{i\in I}$ ailesini alalım.

Göstereceğiz ki $\bigcup_{i\in I} A_i' \in \tau_Y$ dir ?

(Herhangi sayıda ; sonlu da olabilir, sonsuz 'da, sayılamayan da)

(örneğin; $[0,1]$ sayılamayan elemanlıdır.)

$\Rightarrow \forall A_i' \in \tau_Y \Rightarrow \exists A_i \in \tau : A_i' = A_i \cap Y$

$\bigcup_{i\in I} A_i' = \bigcup_{i\in I} (A_i \cap Y) = \underbrace{(\bigcup_{i\in I} A_i)}_{\in \tau} \cap Y \in \tau_Y \Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i' \in \tau_Y$

2.7.1. Tanım: 2.7.1. Teoremindeki τ_Y topolojisine, Y üzerindeki bünyesel (veya indirgenen) topoloji denir. (Y, τ_Y)'ye X'in bir alt uzayı denir. A_i' lere A_i lerin Y'deki izi denir.

1.Örnek// (X,τ) basit (kaba) topolojik uzay ise, bunun her Y alt uzayı da bir basit topolojik uzaydır.

Çözüm: $\tau = \{X, \phi\}$ $Y \subset X$

$X \cap Y = Y$ $\phi \cap Y = \phi$ $\Rightarrow \tau_Y = \{Y, \phi\}$

2.örnek// (X,τ) noktasal topolojik uzay olsun. Bu taktirde bunun her Y alt uzayı yine noktasal bir topolojik uzaydır.

Çözüm// $\tau = P(X)$,

$Y \subset X$, $\forall x \in Y$ alalım. $\Rightarrow x \in X$ olur.

$\{x\} \in \tau$ (tek nokta kümesi de açıktır ve τ nun elemanıdır.)

$\Rightarrow \{x\} \in \tau_Y$ (her tek nokta kümesi açıktır.)

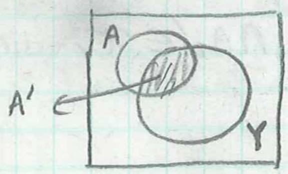
Herhangi bir $A \subset Y$ alalım. $A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \in \tau_Y$

(X'in tüm alt kümeleri açık olur.) $\tau_Y = P(Y)$ olur.

O halde Y'nin üzerindeki topoloji de noktasal topolojidir.

Bir Alt Uzayın Kapalı Kümeleri ve Komşulukları :

X bir topolojik uzay, Y de onun bir alt uzayı olsun. A'da X'in açık bir alt kümesi olsun.



(X,τ)

$$Y - \overbrace{Y \cap A}^{A'} = Y \cap (X - \overset{X'\text{de kapalı}}{A})$$

$$\complement_Y (Y \cap A) = Y \cap \complement_X A$$

(esas topolojik uzayda)

A' bir komşuluk ise A gibi bir komşulukla Y nin arakesitine eşit olur.

Uyarma: (X,τ) bir topolojik uzay, (Y,τ_Y) de onun bir alt uzayı olsun. Y alt uzayının herhangi bir A' açığı genellikle X'de açık değildir. Yine Y alt uzayının herhangi bir F' kapalı alt kümesi genellikle X'de kapalı değildir. Bununla ilgili bir teorem verelim.

kısaca =>

(X,τ)

A', Y'de açık olabilir ama X'de açık olmayabilir.
($A' \in \tau_Y$ fakat $A' \notin \tau$ olabilir.)

F', Y'de kapalı olabilir. ama X'de kapalı olmayabilir.

2.7.2. Teorem: X bir topolojik uzay $Y \subset X$ olsun.

Y nin her açık alt kümesinin (kapalı alt kümesinin) X'de açık olması için gerekli ve yeterli koşul, Y'nin X'de açık (kapalı) olmasıdır.

İspat: $\Leftarrow$: Kabul edelim ki Y, X'de açık olsun.

A', Y'de açık olsun.

$\Rightarrow A' = A \cap Y$ olacak şekilde X de bir A açık alt kümesi vardır.

$A' = \underbrace{A \cap Y}_{X'\text{de açık}}$ X için de açıktır.

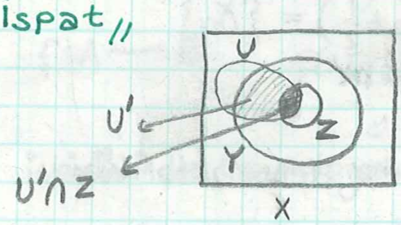
$\Rightarrow$: Y nin her açık alt kümesi X'de açık olsun.

$Y = X \cap Y$ olduğundan ispat tamamlanır.

Alt Uzayların Geçişme Özelliği :

2.7.3. Teorem: X bir topolojik uzay; Y, X'in bir alt uzayı, Z'de Y'nin bir alt uzayı olsun. ($Y \subset X$; $Z \subset Y$). Bu taktirde Z'nin Y'ye göre bünyesel topolojisi, Z nin X'e göre bünyesel topolojisiyle aynıdır.

İspat//



Y nin bir U' açığını alırsak,

$U' = U \cap Y$ U, X'de açıktır.

Z nin (Y'den gelen bünyesel topolojiye göre) bir açığı,

$U' \cap Z = U \cap Y \cap Z = U \cap (\underbrace{Y \cap Z}_{Z}) = U \cap Z$ olur.

(Y tarafından oluşturulan bünyesel topolojiye göre açık,
X " " " " " açığa eşittir.)

Uygulama : (S:84) <u>2.DÖNEM</u>

1// $X = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi üzerinde,

$\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}$ topolojisi veriliyor.

$A = \{a, c, e\}$ ise τ_A bünyesel topolojisini bulunuz.

Çözüm// $X \cap A = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cap \{a\} = \{a\}$, $A \cap \{a, b\} = \{a\}$

$A \cap \{a, c, d\} = \{a, c\}$, $A \cap \{a, b, c, d\} = \{a, c\}$ $A \cap \{a, b, e\} = \{a, e\}$

$\Rightarrow \tau_A = \{A, \emptyset, \{a\}, \{a, c\}, \{a, e\}\}$

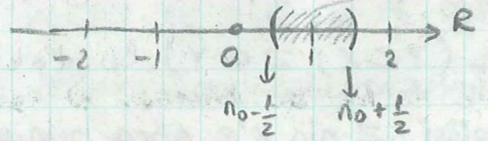
2/ $\mathbb{R}$ üzerinde mutlak değer metriği tarafından oluşturulmuş (yani alışılmış topoloji) τ olsun. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi üzerindeki $\tau_{\mathbb{N}}$ bünyesel (indirgenen) topolojiyi yazınız.

Çözüm// $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ ($\tau_{\mathbb{N}}$, topolisini yazmak demek, $\tau_{\mathbb{N}}$ deki açık kümeleri yazmak demektir.)

$\forall U \in \tau_A$ olması $\Leftrightarrow \overset{U=}{A \cap U}$ o.ş $U' \in \tau$

Alt küme üzerinde bir topoloji oluşturmaya çalışıyoruz. O halde alt küme ile üst uzaydaki açıkların arakesitini ($\mathbb{R}$ deki açıklar ile $\mathbb{N}$ dekilerin arakesitini) almalıyız.

$\forall n_0 \in \mathbb{N}$ için $\left(n_0-\frac{1}{2}, n_0+\frac{1}{2}\right) \in \mathcal{T}$ olsun.



Bu topolojiye göre bu aralık açıktır. ($\mathbb{R}$ de)

$\mathcal{T}_{\mathbb{N}}$ topolojisine göre açıklar için $\mathbb{N} \cap \left(\underbrace{n_0 - \frac{1}{2}}_{\in \mathbb{R}}, \underbrace{n_0 + \frac{1}{2}}_{\in \mathbb{R}}\right) = \{\overset{\in \mathbb{N}}{n_0}\}$ ($n_0 \in \mathbb{N}$)

O halde $\mathcal{T}_{\mathbb{N}}$ indirgenen (bünyesel) topolojiye göre her tek nokta kümesi açık olur.

$A \subset \mathbb{N}$ olsun. A açık ?

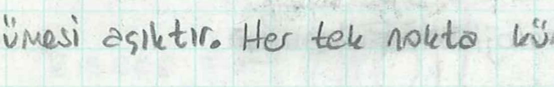
Her tek nokta kümesi açık olduğundan, $\mathbb{N}$ sayılar kümesinin herhangi bir alt kümesi olan A kümesini de, tek nokta kümelerinin birleşimi olarak yazabiliriz. Herhangi sayıda açıkların (kümelerin) birleşimi de açık olacağından A kümesi açık olur.

$\mathbb{N}$ doğal sayılar için, aynısını düşünebiliriz. O halde $\mathbb{N}$, doğal sayılar kümesi açıktır. Her tek nokta kümesi açık olduğundan, $\mathcal{T}_{\mathbb{N}}$ bünyesel topoloji, noktasal topoloji olur. (Kaba topoloji için ve diğerleri için tek nokta kümesi açık değildir.)

(Aynı soruya $\mathbb{Z}$ için düşünelim. O halde $\mathbb{Z}$ de tek nokta kümesi açık olur.)

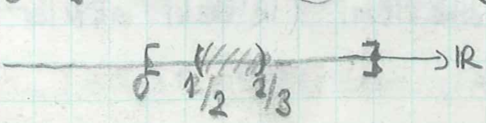
3 – $\mathbb{R}$ üzerinde alışılmış topoloji (mutlak değer metriği) ve $I=[0,1]$ için $\left(\frac{1}{2},1\right]$, $\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$, $\left(0,\frac{1}{2}\right]$ kümelerinin I kümesi üzerindeki bünyesel topolojiye göre açık olup olmadığını gösteriniz.

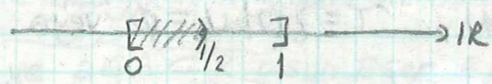
Çözüm // $\left(\frac{1}{2},1\right]$ I üzerindeki bünyesel topolojiye göre bu kümelerin açık olması için kümelerin $\mathbb{R}$'deki açıklar ile I kümesinin arakesitine eşit olması gerekir.



• $\left(\frac{1}{2},1\right] = [0,1] \cap \left(\frac{1}{2}, \underset{\downarrow}{3}\right)$ herhangi bir sayı 1'den büyük olmalı

• $\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right) = [0,1] \cap ? = \left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$ ↳ açık olduğu için kendisini alabiliriz.



$(0, \frac{1}{2}] = [0,1] \cap$ 

I ile Arakesiti $(0, \frac{1}{2}]$ yarı açık

aralığını verecek şekilde IR de açık aralık bulunamaz. O halde bu

küme bünyesel topolojiye göre açık değildir.

4- IR topolojik uzayının iki alt uzayı, $A = [0,1) \cup \{2\}$ ve $B = [0,1]$ olsun.

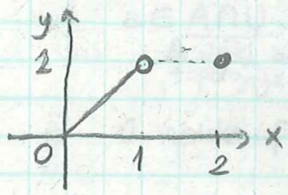
$f: A \longrightarrow B$, $f(x) = \begin{cases} \underbrace{x}_{} , & x \in [0,1) \\ \underbrace{1}_{y \text{ değeri}} , & \underbrace{x = 2}_{x \text{ değeri}} \end{cases}$

biçiminde tanımlayalım. f bir homeomorfizm midir?

f bire-birdir. $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

f örtendir. Değer kümesine karşılık tanım kümesinde bir eleman gelmiştir.

f sürekli midir. Bakalım. f süreklidir.



f^{-1} sürekli?

$f^{-1}: \underset{[0,1]}{B} \longrightarrow \underset{[0,1) \cup \{2\}}{A}$ olur.

$f^{-1}(1) = 2$

$f(2) = 1$

f^{-1} in sürekli olduğunu göstermek için $1 \in B$ 'de sürekliliği gösterelim

f, x_0'da sürekli olsun. $\forall U \in \mathcal{V}(f(x_0)) \Rightarrow f^{-1}(U) \in \mathcal{V}(x_0)$

$\forall U \in \mathcal{V}(\underset{2}{\underset{\parallel}{f^{-1}(1)}})$ için $(f^{-1})^{-1}(U) \in \mathcal{V}(1)$?

$\Rightarrow \forall U \in \mathcal{V}(2)$ için $f(U) \in \mathcal{V}(1)$?

U olarak A' da $\{2\}$ tek nokta kümesini alalım. $\{2\}$ tek nokta

kümesi A kümesinde ayrık nokta olduğundan açıktır. Dolayısıyla 2 nin

komşuluğudur. $2 \in \{2\}$

$f(\{2\}) = \{1\}$ tek nok kümesi açık değildir. (ayrık nokta kümesi olmadığından)

O halde f^{-1} sürekli değildir ve f bir homeomorfizm değildir.

5- IN doğal sayılar kümesinin bir U alt kümesini, IN kümesinin belki

sonlu sayıda elemanı hariç bütün elemanlarını içeriyorsa veya $U = \emptyset$ ise

açık olarak tanımlayalım. Bu açıkların ailesi τ ile gösterilirse,

i - τ'nun IN üzerinde bir topoloji olduğunu gösteriniz.

ii - $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ olmak üzere A üzerindeki bünyesel topolojiyi bulunuz

Çözüm // $U \subset \mathbb{N}$, $\tau = \{U \mid U = \emptyset$ veya $\mathbb{N} - U$ sonlu$\}$

(Sonlu tümleyenler topolojisi adı verilir.)

a) Herhangi bir kümenin kendisi sonsuz elemanlı ise tümleyeni sonlu elemanlıdır.

i- $\emptyset, \mathbb{N} \in \tau$?

$\emptyset \in \tau$ (tanımdan) . $\mathbb{N} - \mathbb{N} = \emptyset$ sonlu olduğundan $\mathbb{N} \in \tau$ dur.

ii- I sonlu elemanlı indisleyen küme olmak üzere $\forall U_i \in \tau$ için $\bigcap_{i \in I} U_i \in \tau$?

$\forall i$ için, $U_i \in \tau$ olduğundan ya $U_i = \emptyset$ veya $N - U_i$ = sonlu elemanlıdır.

$U_i = \emptyset$ olduğundan $\bigcap_{i \in I} U_i = \emptyset \in \tau$ olur.

$\mathbb{N} - U_i$ sonlu olabilir.

$\mathbb{N} - \bigcap_{i \in I} U_i$ sonlu olmalıdır. $\Rightarrow$ $\bigcup_{i \in I} \mathbb{N} - U_i$ sonlu elemanlı kümelerin birleşimi

de sonlu elemanlı olur. $\Rightarrow$ $\bigcap_{i \in I} U_i \in \tau$ dur.

iii- $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$ olur.

b) τ_A bünyesel topolojiye göre açıkları bulmak için, bu topolojiye göre $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesindeki açıklar ile A kümesinin arakesitini alalım.

Bu topolojiye göre $\overset{\text{sonsuz.}}{(N - A)} \cup \{a_0\}$ ($a_0 \in A$ olmak üzere)

$(N - A) \cup \{a_0\}$ kümesinin $\mathbb{N}$'ye göre tümleyeni sonludur.

Bu topolojiye göre bu küme açıktır. U diyelim.

$U = (\mathbb{N} - A) \cup \{a_0\}$

$A \cap U = A \cap [(N - A) \cup \{a_0\}] = \{a_0\}$ olur. $\{a_0\}$ tek nokta kümesi açık olur. A kümesini tek nokta kümelerinin birleşimi olarak yazarsak.

Tek nokta kümelerinin birleşimi olarak yazıldığından A açık kümedir.

Bu topoloji noktasal topolojidir.

- $(N - A) \cup \{a_0\}$ kümesinin tümleyeninde $n-1$ eleman vardır.

$A = \underbrace{\{1, 2, 3\}}_{n \text{ tane}}$ alalım. $N - A = \{1, 2, \ldots\} - \{1, 2, 3\} = \{4, 5, \ldots \infty\}$

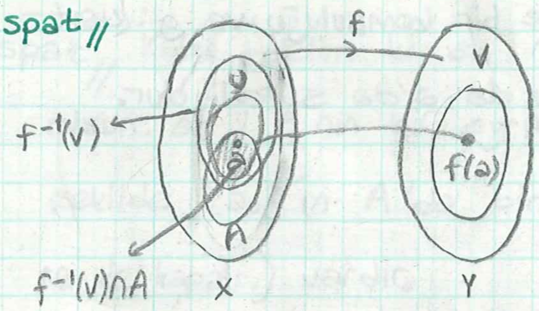
$(N - A) \cup \{3\} = \{3, 4, 5, \ldots \infty\}$

$N - [(N - A) \cup \{a_0\}] = N - \{3, 4, \ldots \infty\} = \{1, 2\}$ $n-1$ tane eleman vardır.

27.3.95 Pazartesi

2.7.4. Teorem: X ve Y iki topolojik uzay, A, X'in bir alt uzayı ve f'de X'den Y içine bir fonksiyon ve $a \in A \subset X$ olsun. Eğer f fonksiyonu X uzayının bu a noktasında sürekli ise f nin A alt uzayına kısıtlaması da a noktasında süreklidir.

İspat//



$(f/A = f_A)$

$g = f/A$ $\forall x \in A$ için $g(x) = f(x)$ oluyorsa, g'ye f'nin <u>kısıtlaması</u>, f'ye de g'nin <u>genişletilmesi</u> denir.

$\forall V \in \mathcal{U}(f(a))$ komşuluğu verildiğinde $\underset{a \in U}{U} \subset f^{-1}(V)$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{U}(a)$ açık komşuluğu vardır. (süreklilik tanımından.)

$a \in \underbrace{A \cap U}_{\text{A daki bünyesel topolojiye göre açık}} \subset A \cap f^{-1}(V) = f_A^{-1}(V)$ $\qquad a \in A \subset f_A^{-1}(V)$

a'nın A daki bünyesel topolojiye göre komşuluğudur.

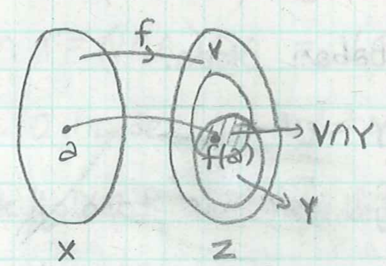
O halde f_A da, a'da sürekli bir fonksiyondur.

Teorem 2.7.5. X ve Z iki topolojik uzay, $Y \subset Z$ ve $f: X \to Y$ içine bir fonksiyon olsun. Bu zaman aşağıdaki özellikler eşdeğerdir.

1- $f: X \to Y$ fonksiyonu $a \in X$ noktasında süreklidir.

2- $f: X \to Z$ fonksiyonu $a \in X$ noktasında süreklidir.

İspat//



f(a) nın Y'de herhangi bir komşuluğu V Z'de f(a) nın bir komşuluğu olmak üzere $V \cap Y$ biçimindedir.

$f^{-1}(V) = f^{-1}(V \cap Y)$ $\qquad$ ($f(X) \subset Y$ olduğundan)

Buradan (1) = (2) olur.

1. Uyarmalar: X, Y iki topolojik uzay, $A \subset X$, $f: X \to Y$ içine bir fonksiyon olsun. Yine f'nin A kümesine kısıtlamasına g $(f/A = g)$ dersek, g fonksiyonu $a \in A$ noktasında sürekli olabilir. Fakat f fonksiyonu a noktasında sürekli olmayabilir.

(Fonksiyonun kendisi sürekli olmayabilir, fakat kısıtlaması sürekli olabilir.)

Örnek // $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \text{ (rasyonel sayılar)} \\ 1, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$ süreksizdir.

$f: \mathbb{R} \to \{0,1\}$

$f/_{\mathbb{Q}}$ sürekli bir fonksiyon $\longrightarrow g = f/A : \mathbb{Q} \to \{0,1\}$

2. Uyarmalar : Eğer A kümesi a noktasının X'de bir komşuluğu ve g kısıtlaması da a'da sürekli ise f fonksiyonu da a'da sürekli olur.

$\forall V \in \mathcal{U}(f(a))$ için $g^{-1}(V) = A \cap f^{-1}(V)$

yazılır. Buradan ispat tamamlanır.

87-6 // (X,τ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{B}$ de τ için bir topoloji tabanı olsun.

Eğer Y, X uzayının bir alt uzayı ise

$$\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$$

ailesinin de Y alt uzayındaki τ_Y bünyesel topolojisi için bir topoloji tabanı olacağını gösteriniz.

Çözüm // $\mathcal{B}$, τ için bir topoloji tabanı ise $\forall U \in \tau$ alındığında,

$U = \bigcup\limits_{B_i \in \mathcal{B}} B_i$ dir. $\forall U' \in \tau_Y$ alalım. $U' = U \cap Y$ olacak şekilde, $U \in \tau$ vardır.

(Bünyesel topolojinin açıkları tanımından)

$B_i' = B_i \cap Y$ olmak üzere $B_i \in \mathcal{B}$, $B_i' \in \mathcal{B}_Y$ ($\forall i$ için)

$\bigcup\limits_{B_i \in \mathcal{B}_Y} B_i' = U'$ olmalı ki τ_Y için topoloji tabanı olsun.

$$\bigcup B_i' = \bigcup (B_i \cap Y) = (\bigcup B_i) \cap Y = U \cap Y = U'$$

bulunur. Yani $\mathcal{B}_Y$ ailesi, τ_Y bünyesel topolojisi için bir topoloji tabanıdır.

6.3.1995
Pazartesi
273

2.7.6. Teorem: X bir topolojik uzay $A \subset X$, $a_0 \in A$ olsun. a_0 noktasının A alt uzayında ayrık bir nokta olması için gerekli ve yeterli koşul, $\{a_0\}$ tek nokta kümesinin A da açık olmasıdır.

İspat // $\Rightarrow$): Kabul edelim ki a_0 noktası A alt uzayının bir ayrık noktası olsun. a_0, A nın bir ayrık noktası ise $U' \cap A = \{a_0\}$ olacak şekilde $\{a_0\}$'ın A'da bir U' komşuluğu (açık, kapalı veya ne açık ne de kapalı.) vardır.

U' yü açık küme olarak seçebiliriz.

$U' = U \cap A$ olacak şekilde X'de bir açık U kümesi (komşuluğu) vardır.

$a_0 \in X$ $\exists U \in \mathcal{U}(a_0)$: $U \cap X = \{a_0\}$

$a_0 \in V$ $a_0 \in A \subset V$ açık

$U' = U \cap A$

$$\{a_0\} = U' \cap A = (U \cap A) \cap A = U \cap \underbrace{(A \cap A)}_{A} = U \cap A = U'$$

olduğundan $\{a_0\}$, A alt uzayında açık olur.

$\Leftarrow$: $\{a_0\}$, A'da açık olsun. O halde $\{a_0\} = V \cap A$ olacak şekilde bir V açık alt kümesi vardır.

$\underset{X\text{'de}}{V} \cap A = V' \Rightarrow V'$, A'da açıktır.

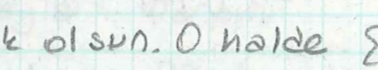
Ayrıca $a_0 \in V'$ olduğundan V', a_0'ın bir açık komşuluğudur.

$$V' \cap A = (V \cap A) \cap A = V \cap \underbrace{(A \cap A)}_{A} = V \cap A = \{a_0\}$$

olur. O halde a_0 noktası A'nın bir ayrık noktasıdır.

1. Örnek // $X = \mathbb{R}$, $A = \{1, 2\}$ diyelim. Her eleman bir ayrık noktadır. Bunu ispatlayalım.

$d(x,y) = |x-y|$



$U = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ $\mathbb{R}$ de açıktır.

$U \cap A = \{1\}$, $V = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ $V \cap A = \{2\}$ olur.

Tek nokta kümesi, noktasal topolojiye göre açıktır.

$\mathcal{T}_A = \{\emptyset, A, \{1\}, \{2\}\}$ noktasal topolojidir.

Tersi de doğrudur. (Ayrık ise açıktır.)

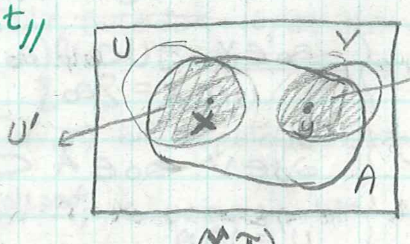
2.örnek// $X=\mathbb{R}$, $A=[0,1]\cup\{5\}$ olsun.

$U=(4,6)$

$U'=U\cap A=\{5\}$ tek nokta kümesi $\mathbb{R}$ de bünyesel topolojiye göre açıktır ve ayrıktır.

2.7.7. Teorem: Bir X Hausdorff uzayının her A alt uzayı yine bir Hausdorff uzayıdır.

ispat//



$(X,\mathcal{T})$

$x,y\in A$ ve $x\neq y$ olsun ve

$A\subset X \Rightarrow x,y\in X$

$\exists U\in\mathcal{V}(x), \exists V\in\mathcal{V}(y)$ $U'=U\cap A$, $V'=V\cap A$

$x\in U', y\in V'$ olur.

$\left\{\begin{array}{l}(X,\mathcal{T}),\ \forall x,y\in X \text{ için} \\ \exists U\in\mathcal{V}(x), \exists V\in\mathcal{V}(y) \\ U\cap V=\emptyset \iff X \text{ Hausdorff uzayı}\end{array}\right\}$

$U'\cap V'=\emptyset$ olduğunu gösterelim.

$U'\cap V'=(U\cap A)\cap(V\cap A)=(\underbrace{U\cap V}_{\emptyset})\cap A=\emptyset\cap A=\emptyset$

$\Rightarrow U'\cap V'=\emptyset$ olur.

Yani A alt uzayı da bir Hausdorff uzayıdır.

2.8. Topolojik Uzayların Sonlu Çarpımları

$E_1, E_2, \dots, E_n$ n-tane topolojik uzay olsunlar.

$$E_1\times E_2\times\dots\times E_n=\prod_{i=1}^{n}E_i=\left\{x \mid x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\ \begin{array}{l}x_1\in E_1\\ x_2\in E_2\\ \vdots\\ x_n\in E_n\end{array}\right\}$$

$$E\xrightarrow{P_i}E_i$$
$$(x_1,x_2,\dots,x_n)=x\longrightarrow P_i(x)=x_i$$

Bunun üzerine öyle bir topoloji koyalım ki, her P_i sürekli olsun.

2.8.1. Tanım: W_i kümeleri E_i $(i=1,2,\dots,n)$ topolojik uzaylarının açık alt kümeleri olmak üzere,

$$P=W_1\times W_2\times\dots\times W_n=\prod_{i=1}^{n}W_i$$

kümesine $E=\prod_{i=1}^{n}E_i$ kümesinin bir <u>temel açığı</u> denir.

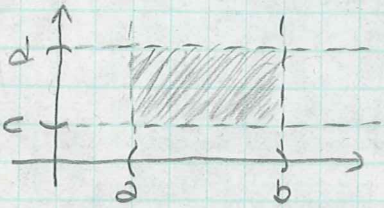
Tanım: E nin temel açıklarının herhangi sayıdasının birleşimine E'nin <u>açık kümesi</u> denir. E'deki bu açıkların kümesini $\mathcal{T}$ ile gösterelim.

Bu τ, E üzerinde bir topolojidir. Buna E'nin <u>çarpım topolojisi</u> denir. Çarpım topolojisine göre izdüşüm fonksiyonu süreklidir.

Örnek // $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$d(x,y) = |x-y|$ alışılmış topolojiyi koyalım.

$\mathbb{R}$'de $(a,b) = W_1$ açığını, diğer $\mathbb{R}$'de $(c,d) = W_2$ açığını alalım.



dikdörtgenler birleşimi açıktır.

$\mathbb{R}^2$ üzerine çarpım topolojisini, $\mathbb{R}$ üzerine alışılmış topolojiyi (pisagor topolojisi) koyarsak

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $\quad y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2}$$

(pisagor metriği açık yuvarlar birleşimidir.)

Boyut sonlu olduğu için tüm normlar denk, dolayısıyla topolojiler de eşittir.

9.3.1995
Perşembe

Alt Uzayların Çarpımı

$E_1, E_2, \ldots, E_n$ topolojik uzaylar, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de sırasıyla bunların alt uzayı olsunlar.

$$E = \prod_{i=1}^{n} E_i = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n \qquad A = \prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$$

E üzerine çarpım topolojisini koyalım. $A \subset E$ dir. O halde A üzerine iki topoloji koyulabilir. Bünyesel topolojiden oluşan çarpım topolojisi ve, E tarafından A'da indirgenen topolojiyi koyabiliriz. Bu iki topoloji birbirinin aynıdır. Buna A alt uzayının çarpım topolojisi denir.

Çarpım Uzayında Sürekli Fonksiyonlar.

2.8.1. Teorem: X bir topolojik uzay, $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$ bir çarpım topolojik uzayı, $x \in X$ ve f de X kümesinden E ye giden bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun bu x noktasında sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul, her P_i (izdüşüm fonksiyonu) için $f_i = P_i \circ f$ fonksiyonunun x noktasında sürekli olmasıdır.

$$X \xrightarrow{f} E \xrightarrow{p_i} E_i$$

$$f_i = p_i \circ f$$

Hausdorff Uzaylarının Çarpımı

2.8.2. Teorem: $X_1, X_2, \dots, X_n$ birer Hausdorff uzayı iseler

$$X = \prod_{i=1}^{n} X_i$$

çarpım uzayı da bir Hausdorff uzayıdır.

İspat// $\forall a, b \in X$ verilsin.

$a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$

$a \neq b \Rightarrow$ en az bir k indisi için $a_k \neq b_k$ olur.

$a_k \in X_k$, $b_k \in X_k$

X_k bir Hausdorff uzayı olduğundan $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{U}(a_k)$ ve $V \in \mathcal{U}(b_k)$ vardır. (U ve V, X_k'da komşuluklar.)

$a \in S = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_{k-1} \times U \times X_{k+1} \times \dots \times X_n$

$b \in T = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_{k-1} \times V \times X_{k+1} \times \dots \times X_n$

S ve T a ve b noktalarının sırasıyla birer komşuluğudur.

Arakesitin boş olduğunu gösterirsek ispat tamamlanır.

Eğer arakesit boş olmasaydı;

$S \cap T \neq \emptyset$ olsun. $\Rightarrow \exists z \in S \cap T$ olurdu.

$z = (x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \dots, x_n)$

$x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, $t \in U$, $t \in V$ $\Rightarrow t \in U \cap V$ olur. Bu ise çelişkidir.

O halde $S \cap T = \emptyset$ olur. a'nın S, b'nin T komşuluğu vardır ve kesişimleri boştur. X bir Hausdorff uzayıdır.

Örnek// $\mathbb{R}$ üzerine alışılmış topolojiyi koyarsak, çarpımları olan $\mathbb{R}^n$ de bir Hausdorff uzayıdır.

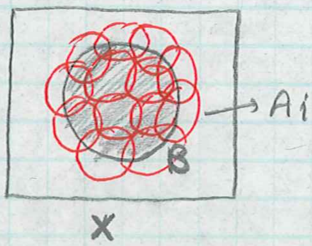
III. BÖLÜM

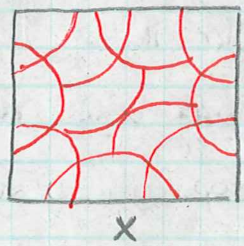
3. KOMPAKT (TIKIZ) TOPOLOJİK UZAYLAR

3.1. Tanım: X bir küme, $B \subset X$, I numaralayan küme, $(A_i)_{i\in I}$ da X'in alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer

$$B \subset \bigcup_{i\in I} A_i$$

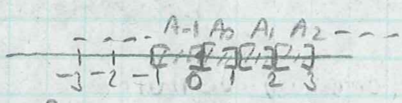
oluyorsa, $(A_i)_{i\in I}$ ailesine B alt kümesinin bir örteni denir veya bu aile B yi örtüyor denir. Özel olarak $B = X$ ise ve $X = \bigcup_{i\in I} A_i$ oluyorsa, $(A_i)_{i\in I}$ ailesine X kümesinin bir örteni denir. (X'i örtüyor denir.)





1. Örnek// (X,τ) bir topolojik uzay $X_0 \in X$ olsun. Bu uzaydaki tüm komşulukların ailesini $\mathcal{U}(x_0)$ ile gösterirsek, bu aile bu X topolojik uzayının bir örtenidir.

2. Örnek//



$A_n = [n, n+1]$, $n \in \mathbb{Z}$

$A_1 = [1,2]$ $A_2 = [2,3]$ $A_0 = [0,1]$

$\mathbb{R} = \bigcup_{n\in \mathbb{Z}} A_n$ $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ailesi $\mathbb{R}$ nin bir örtenidir.

3.2. Tanım: X bir küme, $C \subset X$, $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$, $(B_\beta)_{\beta\in J}$, C kümesinin iki tane örteni olsun. Eğer her $\alpha \in I$ için $A_\alpha = B_\beta$ olacak şekilde bir $\beta \in J$ varsa $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ ailesine $(B_\beta)_{\beta\in J}$ ailesinin bir <u>alt örteni</u> denir.

(Bu durumda A_α lardan her biri, bir tane B_β'ya eşittir.)

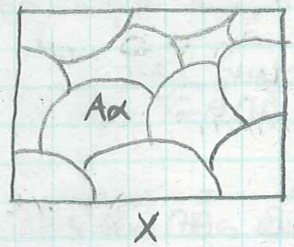
Örnek// 2. örnekteki $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $\mathbb{R}$ nin bir alt örtenidir.

Örnek// $B_q = [q, q+1]$, $q \in \mathbb{Q}$ olmak üzere $(B_q)_{q\in\mathbb{Q}}$

$\forall n \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Q}$ (her tam sayı bir rasyonel sayıdır.)

$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ örteni $(B_q)_{q\in\mathbb{Q}}$ örteninin bir alt örtenidir.

Tanım: X kümesinin bir $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ örteni verilmiş olsun. Eğer $\forall i,j \in I$ için $A_i \cap A_j = \phi$ ise bu taktirde, $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ örtüsüne X'in bir ayrık örtüsü denir.



Bu örten bir ayrık örtendir.

3.3. Tanım: (X,τ) bir topolojik uzay $B\subset X$ olsun. Eğer B'nin bir $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ örteninin her A_α elemanı açıksa, yani $A_\alpha \in \tau$ ise bu $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ ailesine B nin bir açık örteni denir.

Eğer örtenler ikişer ikişer ayrık ise (açık örtenler) bu $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ ailesine ayrık açık örten denir.

3.4. Tanım: (X,τ) topolojik uzayı verilsin. Eğer X kümesinin her $(U_i)_{i\in I}$ açık örteninin bir $(U_i)_{i\in J}$ sonlu alt açık örteni varsa, X topolojik uzayına kompakttır (tıkızdır) denir.

Bu tanımı şöyle de verebiliriz.

Herhangi bir $(U_i)_{i\in I}$ açık örteni (örtüsü) verildiğinde $X = U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} \cup \dots \cup U_{\alpha_n}$ olacak şekilde $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \subset I$ sonlu alt kümesi varsa X topolojik uzayına kompakttır denir.

3.5. Tanım: Bir (X,τ) kompakt uzayı verilsin. $C\subset X$ olsun. Eğer C kümesi bünyesel topolojiye göre kompaktsa, C kümesine kompakttır denir.

(C,γ), (X,τ) $\forall U\in\gamma$, $U = U'\cap C$ o.ş. $U'\in\tau$ } bünyesel topoloji

(X,τ) kompakt ise (C,γ)nin kompakt olması
$(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ (C'nin örtüsü)
$C = U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} \cup \dots \cup U_{\alpha_n}$
$\downarrow$
$U_{\alpha_1} = U'_{\alpha_1} \cap C$
alt uzayda, → üst uzayda örten.

3.1. Teorem: X bir kompakt uzay olsun. Aşağıdaki özellikler vardır ve denktir.

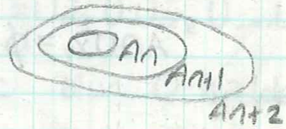
1- $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ artan $(A_n \subset A_{n+1})$ $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = X$ koşulunu sağlayan açıklar ailesi ise $A_{n_0} = X$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır.

2- $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ azalan ($F_{n+1} \subset F_n$) ve $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset$ koşulunu sağlayan bir kapalılar ailesi ise $F_{n_0} = \emptyset$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır.

3- $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ azalan ve her $n\in\mathbb{N}$ için $F_n \neq \emptyset$ koşulunu sağlayan bir kapalılar ailesi ise $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$ olur.

İspat// (1) in varlığını ispatlayalım.

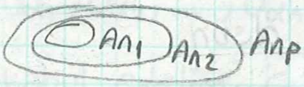
$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ artan ve $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = X$ koşulunu sağlayan açıklar ailesi verilsin. $\forall n\in\mathbb{N}$ için $A_n \subset A_{n+1}$ ve $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = X$



X kompakt olduğundan,

$X = A_{n_1} \cup A_{n_2} \cup \dots \cup A_{n_p}$ olacak şekilde $\{n_1, n_2, \dots, n_p\} \subset I$

sonlu indisleri vardır. $\max\{n_1, n_2, \dots, n_p\} = n_0$ diyelim.



$A_{n_1} \cup A_{n_2} \cup \dots \cup A_{n_p} \subseteq A_{n_0}$

$A_{n_1} \subseteq A_{n_0}$, $A_{n_2} \subseteq A_{n_0}, \dots, A_{n_p} \subseteq A_{n_0}$

$A_{n_0} = X$, $X = A_{n_1} \cup A_{n_2} \cup \dots \cup A_{n_p} \subseteq A_{n_0} \Rightarrow X = A_{n_0}$ $(n_0 \in \mathbb{N})$ //

$F_n = X - A_n$ kapalıdır. Diğerleri buradan ispatlanır.

3.2. Teorem: X bir kompakt uzay olsun. Aşağıdaki özellikler vardır ve denktir.

1- X uzayının sonsuz elemanlı her A alt kümesinin X içinde en az bir yığılma noktası vardır.

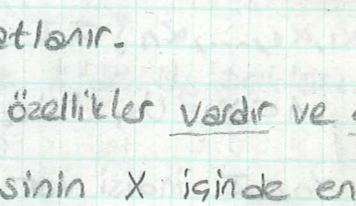
2- X içinde yığılma noktası olmayan X'in her A alt kümesi sonlu elemanlıdır.

İspat 2// ($A \subset X$, $\forall U \in \mathcal{U}(x_0)$ için $A \cap (U - \{x_0\}) \neq \emptyset \Leftrightarrow x_0 \in X$ yığılma noktası.)

Kabul edelim ki, A kümesinin X kümesinde yığılma noktası olmasın.

Ve yine kabul edelim ki, $\forall x_0 \in X$ için

x_0 noktası, A kümesinin yığılma noktası olmasın.



- $x_0 \in A \Rightarrow \forall U_{x_0} \in \mathcal{U}(x_0)$ için,

$A \cap U_{x_0} = \{x_0\}$ olur.

- $x_0 \notin A \Rightarrow \forall U_{x_0} \in \mathcal{U}(x_0)$ için, $A \cap U_{x_0} = \emptyset$ olur.

Eğer x_0 noktasını, X kümesinde taratırsak her defasında başka bir U_{x_0} elde ederiz. Bunun sonucu olarak, $\underbrace{X = \bigcup_{x_0 \in X} U_{x_0}}$

X kompakt olduğundan U_{x_0}'ın, $U_{x_1}, U_{x_2}, \dots, U_{x_n}$ sonlu alt açık örteni vardır. Öyle ki, $X = U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \dots \cup U_{x_n}$ şeklindedir.
$\forall x_1$ nok. açık komşuluğu.

$A \cap U_{x_1} = \emptyset$ veya $A \cap U_{x_1} = \{x_1\}$

$A \cap U_{x_2} = \emptyset$ " $A \cap U_{x_2} = \{x_2\}$

$\vdots$

$A \cap U_{x_n} = \emptyset$ " $A \cap U_{x_n} = \{x_n\}$

$A = \emptyset$ sonludur. $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ sonludur.

$A \subset X = U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \dots \cup U_{x_n}$

yığılma noktası yoksa sonlu elemanlıdır.

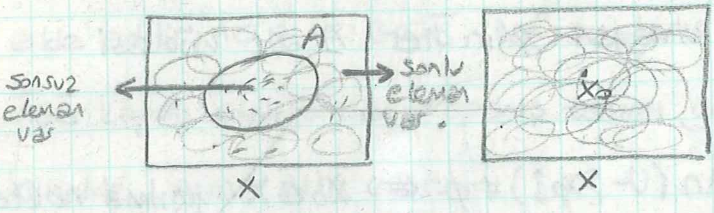
İspat 1// A kümesi X'de sonsuz elemanlı bir küme olsun.

X, kompakt bir küme olduğundan 3.4. Tanım gereğince $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ açık örteni verildiğinde $X = U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} \cup \dots \cup U_{\alpha_n}$ olacak şekilde $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \subset I$ sonlu alt kümesi vardır.

$A \subset X = U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} \cup \dots \cup U_{\alpha_n}$ şeklinde idi. $\forall x_0 \in X$ noktası alalım.

$\exists \alpha_0 \in I$ indisi var : $x_0 \in U_{\alpha_0}$'a aittir. $A \cap U_{\alpha_0} \neq \emptyset$ olur.

O halde x_0 noktası bir yığılma noktasıdır.

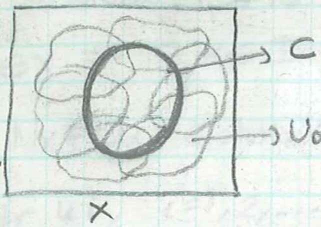


x_0, örtenlerin en az birinin içindedir.

3.3. Teorem: (X, τ) topolojik uzay, $C \subset X$ olsun. C kümesinin kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul, her U_α X'de açık olmak üzere, C nin herhangi bir $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ açık örteni verildiğinde C kümesinin bir $U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \dots, U_{\alpha_n}$ gibi sonlu bir alt açık örteninin bulunmasıdır.

İspat// $\Rightarrow$: Kabul edelim ki, C kompakt olsun ve yine kabul edelim ki, $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ da, C'nin bir açık örteni olsun.

($\forall U_\alpha$, X'de açık.)



$U_\alpha' = U_\alpha \cap C$ $\quad C \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$

$\forall U_\alpha'$, C 'deki bünyesel topolojiye göre açıktır.

Ayrıca, $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha' = \bigcup_{\alpha \in I} (U_\alpha \cap C) = (\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha) \cap C = C$ ise

$(U_\alpha')_{\alpha \in I}$ ailesi C nin, C deki bünyesel topolojiye göre bir açık örtenidir. Öyle bir $J \subset I$ sonlu indisi vardır ki, $\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha' = C$ olur.

Diyelim ki, $J = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ olsun. O halde $C = U_{\alpha_1}' \cup U_{\alpha_2}' \cup ... \cup U_{\alpha_n}'$ olur. $U_{\alpha_1}' = U_{\alpha_1} \cap C$, $U_{\alpha_2}' = U_{\alpha_2} \cap C$, ..., $U_{\alpha_n}' = U_{\alpha_n} \cap C$ olur. O halde,

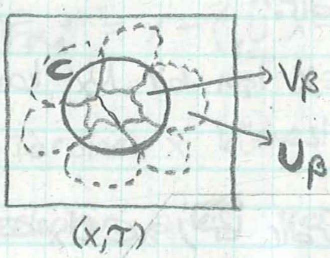
$C \subset U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} \cup ... \cup U_{\alpha_n}$ dir.

$\Leftarrow$: Herhangi bir $(U_\alpha)_{\alpha \in J}$ açık örteni verildiğinde C kümesinin bir $U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, ..., U_{\alpha_n}$ gibi sonlu bir alt açık örteninin X 'de bulunduğunu kabul edelim. C'nin kompakt olduğunu göstermeliyiz.

Kabul edelim ki, $(V_\beta)_{\beta \in I}$, C 'deki bünyesel topolojiye göre bir açık örten olsun.

$\forall \beta \in J$ için $V_\beta = U_\beta \cap C$ olacak şekilde X'de U_β açıkları vardır.

$\forall V_\beta$ için, $V_\beta \subset U_\beta$ $\quad C = \bigcup_{\beta \in I} V_\beta \subset \bigcup_{\beta \in I} U_\beta$



$(U_\beta)_{\beta \in I}$, $\forall U_\beta$ X'de açık ve $C \subset \bigcup_{\beta \in I} U_\beta$ kabulümüzden dolayı,

$C \subset U_{\beta_1} \cup U_{\beta_2} \cup ... \cup U_{\beta_n}$ olacak şekilde, $U_{\beta_1}, U_{\beta_2}, ..., U_{\beta_n}$ açıkları vardır.

$$C = (U_{\beta_1} \cup U_{\beta_2} \cup ... \cup U_{\beta_n}) \cap C = \underbrace{(U_{\beta_1} \cap C)}_{V_{\beta_1}} \cup \underbrace{(U_{\beta_2} \cap C)}_{V_{\beta_2}} \cup ... \cup \underbrace{(U_{\beta_n} \cap C)}_{V_{\beta_n}}$$

$V_{\beta_1}, V_{\beta_2}, ..., V_{\beta_n}$ lerin birleşimi C'ye eşittir. O halde C, bünyesel topolojiye göre kompakttır, dolayısıyla kompakttır.

3.3.1. Sonuç // X bir Hausdorff uzayı $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de bu uzayda bir a elemanına yakınsayan bir dizi olsun. Bu zaman,

$B = \{a, a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ kümesi kompakttır.

ispat// Kabul edelim ki $(W_i)_{i\in I}$, B'nin bir açık örteni olsun.

($\forall W_i$, X'de açık)

$\exists i_0 \in I : a \in W_{i_0}$ olur.

$a_n \to a \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : A_{n_0} \subset W_{i_0}$

$A_{n_0} = \{a_{n_0}, a_{n_1}, \ldots\}$ olur. O halde $n_0 - 1$ tane a_n, W_{i_0} dışında, geriye kalanlar içindedir.

Kabul edelim ki, dışardaki elemanlar; $a_1, a_2, \ldots, a_{n_0-1}$ olsun.

$B \subset \bigcup_{i\in I} W_i \Rightarrow \exists W_1 : a_1 \in W_1$
$\exists W_2 : a_2 \in W_2$
$\vdots$
$\exists W_{n_0-1} : a_{n_0-1} \in W_{n_0-1}$

$W_{i_0}, W_1, W_2, \ldots, W_{n_0-1}$ açık kümeleri B kümesini örter. Yani,

$B \subset W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_{n_0-1} \cup W_{i_0}$ olur.

Teorem 3.3 den dolayı B kompakt olur. Böylece teorem ispatlanır.

3.4. Teorem: Bir $(X,\mathcal{T})$ topolojik uzayı verilsin. X kümesinin kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul $\forall x \in X$ elemanının bir N_x komşuluğu verildiğinde $X = \bigcup_{i=1}^{n} N_{x_i}$ olacak şekilde X kümesinin sonlu tane $x_1, x_2, \ldots, x_n$ noktasının bulunmasıdır.

ispat// $\Rightarrow$: Kabul edelim ki, X kompakt olsun. $\forall x \in X$ için bir N_x komşuluğunun verildiğini kabul edelim.

N_x bir komşuluk ise, $\exists U_x$ açık kümesi vardır ki, $x \in U_x \subset N_x$.

$(U_x)_{x\in X}$ ailesi X in açık örtenidir. $X = \bigcup_{x\in X} U_x$

X kompakt ise $\exists U_{x_1}, U_{x_2}, \ldots, U_{x_n}$ vardır ki X kümesini örter.

Yani $X = U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \ldots \cup U_{x_n}$

$U_{x_1} \subset N_{x_1}, U_{x_2} \subset N_{x_2}, \ldots, U_{x_n} \subset N_{x_n}$

$N_{x_1}, N_{x_2}, \ldots, N_{x_n}$ de X kümesini örter.

$\Leftarrow$: $\forall x \in X$ elemanının bir N_x komşuluğu verildiğinde $X = \bigcup_{i=1}^{n} N_{x_i}$ olacak şekilde X'in sonlu tane $x_1, x_2, \ldots, x_n$ noktasının bulunduğunu kabul edelim.

Yine kabul edelim ki, $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$, X'in bir açık örteni olsun.

$\forall x\in X \Rightarrow \exists \alpha\in I \,;\, x\in U_\alpha$

$N_x = U_\alpha$ alalım. Kabulden dolayı öyle $x_1, x_2, \dots, x_n$ noktaları vardır ki, $i=1,2,\dots,n$ olmak üzere, $N_{x_i} = U_\alpha(x_i)$ kümeleri X kümesini örter. Böylece X kompakt olur.

3.5. Teorem : Bir (X,T) topolojik uzayının kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul $\bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha = \emptyset$ koşulunu sağlayan bir $(F_\alpha)_{\alpha\in I}$ kapalılar ailesi verildiğinde $\bigcap_{i=1}^{n} F_i = \emptyset$ olacak şekilde indislerin $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ sonlu alt kümesinin bulunmasıdır.

İspat $\Rightarrow$: X kompakt ve $(F_\alpha)_{\alpha\in I}$'da $\bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha = \emptyset$ kapalıların bir ailesi olduğunu kabul edelim.

$\forall \alpha\in I$ için F_α kapalı $\Rightarrow$ $X - F_\alpha$ açıktır.

$\bigcup_{\alpha\in I} (X - F_\alpha) = X - \bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha = X - \emptyset = X$

$(X - F_\alpha)_{\alpha\in I}$ ailesi X'in bir açık örtenidir. X kompakt olduğundan $X - F_{\alpha_1}, X - F_{\alpha_2}, \dots, X - F_{\alpha_n}$ gibi bir sonlu alt açık örteni vardır.

$X = (X - F_{\alpha_1}) \cup (X - F_{\alpha_2}) \cup \dots \cup (X - F_{\alpha_n})$

$\bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} = X - \left(\bigcup_{i=1}^{n} X - F_{\alpha_i}\right) = X - X = \emptyset$ olur.

$\Leftarrow$: Tersine, X kümesinin $\bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha = \emptyset$ koşulunu sağlayan kapalı alt kümelerinin ailesi verildiğinde $\bigcap_{i=1}^{n} F_\alpha = \emptyset$ koşulunu sağlayan indislerin $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ sonlu alt kümesinin varlığını kabul edelim.

Kabul edelim ki $(U_\beta)_{\beta\in J}$, X'in herhangi bir açık örteni olsun. $\left(X = \bigcup_{\beta\in J} U_\beta\right)$

O halde $\forall \beta\in J$ için $X - U_\beta$ kapalıdır.

$\bigcap_{\beta\in J} (X - U_\beta) = X - \bigcup_{\beta\in J} U_\beta = X - X = \emptyset$ olur.

O halde kabulümüzden dolayı, $\bigcap_{i=1}^{n} (X - U_{\beta_i}) = \emptyset$ olacak şekilde $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ vardır. $((X - U_{\beta_1}), (X - U_{\beta_2}), \dots, (X - U_{\beta_n})$ vardır ki kesişimleri $\emptyset$ olur.$)$

$\bigcup_{i=1} U_{\beta_i} = \bigcup_{i=1} [X-(X-U_{\beta_i})] = X - \bigcap_{i=1} (X-U_{\beta_i}) = X$

bulunur. O halde X kompakttır. //

3.6. Teorem : Bir X Hausdorff uzayının her A kompakt alt uzayı kapalıdır.

İspat //

(X,T)

$\forall y \in A$, $\forall x_0 \in X-A$ verilsin.

$x_0 \neq y$,

$\exists V_y \in \mathcal{U}(x_0)$ ve $\exists W_y \in \mathcal{U}(y)$: açık komşulukları vardır ki, $V_y \cap W_y = \emptyset$

$(W_y)_{y\in A}$, A nın bir açık örtenidir.

A kompakt olduğundan, $\exists W_{y_1}, W_{y_2}, \dots, W_{y_p}$: $A \subset W_{y_1} \cup W_{y_2} \cup \dots \cup W_{y_p}$

olur. yine, $W_{y_1} \cap V_{y_1} = \emptyset$, $W_{y_2} \cap V_{y_2} = \emptyset, \dots, W_{y_p} \cap V_{y_p} = \emptyset$ $\Big\{ \; V_{y_1} \quad V_{y_2} \quad V_{y_p}$

olur. $V = V_{y_1} \cap V_{y_2} \cap \dots \cap V_{y_p}$ diyelim. $\Downarrow$ --- (1)

V, x_0'ın bir açık komşuluğudur.

$V \cap W_{y_1} = \emptyset$, $V \cap W_{y_2} = \emptyset, \dots, V \cap W_{y_p} = \emptyset$ Bunun sonucu,

$V \cap (W_{y_1} \cup W_{y_2} \cup \dots \cup W_{y_p}) = \underbrace{(V \cap W_{y_1})}_{\emptyset} \cup \underbrace{(V \cap W_{y_2})}_{\emptyset} \cup \dots \cup \underbrace{(V \cap W_{y_p})}_{\emptyset} = \emptyset$

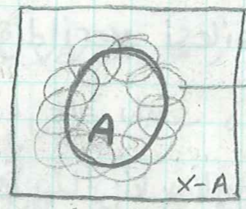
çıkar. $V \cap A = \emptyset \Rightarrow x_0 \in V \subset X-A$

$X-A$ kendi içindeki her noktanın bir komşuluğudur. Yani

$X-A$ açıktır. A kapalıdır.

3.7. Teorem: X kompakt bir uzay olsun. X uzayının kapalı her alt uzayı yine kompakttır.

İspat // A kapalı alt uzay olsun.



(X,τ)

A kapalı $\Rightarrow$ $X-A$ açıktır.

$(U_i)_{i\in I}$, A nın bir açık örteni olsun.

($\forall U_i$, X'de açık)

$X-A$, $(U_i)_{i\in I}$ ikisi de (X,τ) da açıktır.

$(X-A) \cup \{U_i \mid i\in I\} = X$ (X'in açık bir örtenidir.)

X kompakt olduğundan $X-A$ ile birlikte sonlu tane U_i, X'i örter.

$(X-A) \cup U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \dots \cup U_{i_n} = X$

//

$X-A$ yı alırsak, seriye kalan küme A'yı örter. Yani, $U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_n}$ ler de A'yı örter. Bu nedenle (3.3. Teoreminden) A kompakttır.

3.7.1. Sonuç // Bir (X,T) kompakt Hausdorff uzayının A alt kümesinin kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul, A nın kapalı olmasıdır.

İspat // $\Rightarrow$: 3.7. Teoremi gereğince, (X,T) kompakt ve A kapalı ise A kompakttır.

$\Leftarrow$: 3.6. Teoreminden dolayı; X, Hausdorff uzayı ise A'da onun alt uzayı olduğundan, A kapalıdır.

Eğer (X,T) bir Hausdorff uzayı değilse, X uzayının kompakt bir alt kümesinin kapalı olması gerekmez. Bununla ilgili örneği; Uygulama'da göreceğiz.

3.8. Teorem: $\mathbb{R}$ üzerine, mutlak değer metriği tarafından oluşturulan topolojiyi koyalım. $\mathbb{R}$ nin bir X alt kümesinin kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul, X'in kapalı ve sınırlı olmasıdır.

İspat // $\Leftarrow$: Kabul edelim ki; X, $\mathbb{R}$ nin kapalı ve sınırlı bir alt kümesi olsun. Kabul edelim ki X'in EKÜS'ü b, EBAS'ı a olsun. (X sınırlı olduğundan.)

$X \subset [a,b]$ olur. Heine-Borel (örtme) teoreminden dolayı bünyesel topolojiye göre $[a,b]$ kompakttır. (X, $\mathbb{R}$ de kapalı)

$X \cap [a,b] = X$ yani X, $[a,b]$ de kapalıdır.

O halde 3.7. Teoreminden X kompakt, 3.3 Teoremine göre de, bünyesel topolojiye göre kompakttır.

$\Rightarrow$: Kabul edelim ki X, $\mathbb{R}$ nin kompakt bir alt kümesi olsun.

$\forall n$ için $A_n = (-n,n)$, $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $X \subset \mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

$A_1, A_2, \dots, A_{n_0}$ .. $X \subset \bigcup_{i=1}^{n_0} A_i$ $n_0 = \{1,2,\dots,n_0\}$ $X \subset A_{n_0} = (-n_0, n_0)$

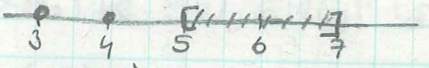
$\Rightarrow X$ sınırlıdır.

Her metrik tarafından oluşturulan topoloji, bir Hausdorff uzayı olduğundan $\mathbb{R}$ bir Hausdorff uzayıdır. Ve X, $\mathbb{R}$ uzayının bir kompakt alt uzayı olduğundan 3.6. Teoreminden dolayı X kapalıdır.

Örnek // $A=[-6,7]$ kapalı ve sınırlıdır, kompakttır.

$B=(-4,3]$ yarı-açık, sınırlı, kompakt değildir.

$C=\{3\}\cup\{4\}\cup[5,7]$



C, kapalı, sınırlıdır, dolayısıyla (kapalıdır) kompakttır.

3.9. Teorem: X bir topolojik uzay olsun.

1- X'in sonlu sayıda kompakt alt uzaylarının birleşimi yine kompakttır.

2- X bir Hausdorff uzayı ise bunun herhangi sayıda kompakt alt uzaylarının arakesiti yine kompakttır.

İspat // 1- Kabul edelim ki A ve B, X'in iki kompakt alt uzayı olsunlar. $A\cup B$ nin kompakt olduğunu göstermeliyiz. Yine kabul edelim ki $(W_i)_{i\in I}$ da $A\cup B$ nin herhangi bir açık örteni olsun. ($\forall W_i$; X de açık)

$A\cup B\subset \bigcup_{i\in I} W_i \Rightarrow (W_i)_{i\in I}$ hem A'nın hem de B nin bir açık örtenidir. A ve B kompakt olduğundan A yı ve B yi örten $(W_i)_{i\in I}$ ler vardır. A yı örtenler $W_{i_1}, W_{i_2}, \ldots, W_{i_p}$ ve B yi örtenler de $W_{i_q}, W_{i_{q+1}}, \ldots, W_{i_{q+t}}$ olsun. O halde $W_{i_1}, W_{i_2}, \ldots, W_{i_p}, W_{i_q}, \ldots, W_{i_{q+t}}$ ailesi de $A\cup B$ yi örter. Yani $A\cup B$ kompakttır.

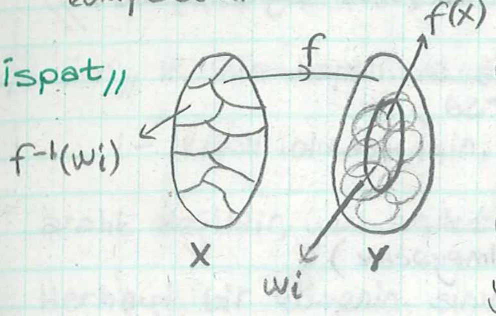
İspat 2- Kabul edelim ki, $\forall i\in I$ için $A_i\subset X$ ve A_i kompakt olsun.

$A=\bigcap_{i\in I} A_i$ A nın kompakt olduğunu göstermeliyiz.

X bir Hausdorff uzayı, $A_i\subset X$ kompakt $\Rightarrow$ $\forall i\in I$ için A_i ler kapalıdır. Dolayısıyla herhangi sayıda kapalının arakesiti olan A kapalıdır. $A\subset A_i$ dir. ($\forall i\in I$) ve A uzayı A_i'ler için(de) kapalıdır. Sonuçta, A_i kümeleri kompakt olduğundan 3.7. Teoreminden (esas topolojiye göre) A (kapalıdır.) kompakttır.

Teorem 3.10.: X bir kompakt uzay, Y bir topolojik uzay ve f de X uzayından Y ye sürekli bir fonksiyon olsun. Bu zaman $f(X)$'de kompakttır.

İspat//



$(w_i)_{i\in I}$, $f(x)$ in bir açık örteni olsun.

$\forall i \in I$ için $f^{-1}(w_i)$'ler X de açıktır.

$(f^{-1}(w_i))_{i\in I}$ de X kümesini örter.

Yani X'in bir açık örtenidir.

X kompakt $\Rightarrow$ $f^{-1}(w_i)$ lerin sonlu tanesi X kümesini örter.

$f^{-1}(w_{i_1}), f^{-1}(w_{i_2}), \dots, f^{-1}(w_{i_p})$'ler X kümesini örter. O halde $w_{i_1}, w_{i_2}, \dots, w_{i_p}$ ler de $f(X)$'i örter. Yani $f(X)$ kompakttır.

3.11. Teorem: X bir kompakt uzay, Y bir Hausdorff uzayı ve f'de X kümesinden Y kümesine sürekli, birebir ve örten bir fonksiyon olsun. Bu zaman f, X kümesinden Y'ye bir homeomorfizmdir.

İspat// $f^{-1}: Y \to X$ olduğu; f 1:1 ve örten olduğundan açıkça görülür.

X kümesinde bir K kapalı alt kümesi alalım.

$(f^{-1})^{-1} = f$ olduğundan $(f^{-1})^{-1}(K) = f(K)$ olur. X kompakt ve K'da X uzayında kapalı olduğundan 3.7.'den dolayı K alt uzayında kompakttır.

3.10. teoremden $f(K)$ da kompakttır.

$f(K) \subset Y \Rightarrow$ hausdorff ise, $f(K)$, Y de kapalıdır.

O halde $f^{-1}: Y \to X$ süreklidir. Bu nedenle f homeomorfizm olur.

3.12. Teorem: X kompakt bir uzay ve f'de X kümesinden $\mathbb{R}$'ye sürekli bir fonksiyon olsun. Bu zaman f fonksiyonu X üzerinde sınırlı olup, burada en küçük üst sınır (sup) ve en büyük alt sınır (inf) değerlerini alır.

İspat// $f(X) \subset \mathbb{R}$ $\qquad$ $f(X)$ kompakttır. (3.10. Teorem)

3.8. Teoremden, $f(X)$ kapalı ve sınırlıdır.

$\sup f(X) = M \qquad \inf f(X) = m$

{ [a,b] de, ekü s ve ebas, kümeye aittir. Çünkü küme kapalıdır. }

$M \in f(X)$, $m \in f(X)$ olur. $f(X) = \{y \mid f(x) = y , x \in X\}$

$$\left.\begin{array}{l} M \in f(X) \Rightarrow \exists x_1 \in X : f(x_1) = M \\ m \in f(X) \Rightarrow \exists x_2 \in X : f(x_2) = m \end{array}\right\} \text{ Yani fonk. Max, Min değerini alır. //}$$

3.13. Teorem: $X_1, X_2, \ldots, X_k$ kompakt uzaylarsa,

$$E = \prod_{i=1}^{k} X_i$$

uzayı da kompakttır. (ispatı yapılmayacak)

– UYGULAMA –

27.3.95. / P.tesi

1 – IR üzerine alışılmış topolojiyi koyalım. Bu topolojiye göre IR kümesinin kompakt olmadığını gösteriniz.

Çözüm // IR üzerinde mutlak değer metriği tarafından (alışılmış topoloji) oluşturulan bir metrik var.

X'in kompakt olması : $(U_i)_{i \in I}$ herhangi sayıda, X'in açık örteni olmak üzere $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ olacak şekilde U_i sonlu alt açık örtüsü vardır.

IR'nin kompakt olabilmesi için, bu topolojiye göre her açık örtüsünün sonlu bir açık örtüsü olmalıdır.

Diyelim ki, $n \in Z$ olmak üzere, $IR = \bigcup_{n \in Z} (n-1, n+1)$ olsun.

n'yi IR'de taratırsak bunların sonsuz tanesi IR yi örter.

$(n-1, n+1)$ açık aralık açık kümedir. Çünkü alışılmış topoloji. O halde bu kısım IR nin açık örtüsüdür.

n'yi tamsayılarda gezdirince her seferinde bir açık elde ediyoruz.

Bunlardan sonlu tanesini aldığımızda IR'yi örtebiliyor mu?

Ama bu örtünün sonlu tanesi IR yi örtemez. Yani IR, bu açık örtünün sonlu tanesinin birleşimine eşit olmaz. Yani bu açık örtüden sonlu tane alt açık örten elde edilemez.

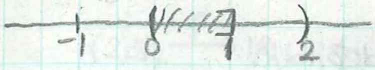
Dolayısıyla IR kompakt değildir.

2- Aşağıdaki kümelerin $\mathbb{R}$'nin kompakt alt kümesi olup olmadığını gösteriniz.

i- $(0,1]$ ve $(0,1)$ ii- $[0,1]\cup\{5\}$ ve $[0,1]\cup\{3,4,\dots,n\}$

Çözüm// $\mathbb{R}$'nin kapalı ve sınırlı alt kümesi kompakttır.

i- Kapalı olması için, önce kapalı aralık olmalı ama $(0,1]$ kapalı aralık değildir, yarı açıktır. O halde kompakt değildir. Sınırlı mı? Herhangi bir kümenin sınırlı olması için, yarıçapı sonlu olan bir kümenin içine düşebilmelidir. $(0,1]$ yarıçapı sonlu olan bir açık aralığın içine



düşer. Yani alt kümesi olur. $(0,1]\subset(0,2)$ olacak şekilde $(0,2)$ açık aralığı vardır.

sınırlı ama kapalı değil. O halde $(0,1]$ yarı açık aralığı kompakt değildir.

$(0,1)$ açık aralığı sınırlıdır. $((0,1)\subset(0,1))$ ancak kapalı değildir. O halde kompakt değildir.

ii-

Bu kümeyi kapsayan bir aralık olacak.

$A=[0,1]\cup\{5\} \Rightarrow A\subset(-1,\frac{11}{2})$

O halde A sınırlıdır. Çünkü yarıçapı sınırlı olan bir açık kümenin alt kümesidir. A kapalı?

$\{5\}$ tek nokta kümesi kapalıdır. Çünkü Hausdorff uzayında her tek nokta kümesi kapalıdır. Reel sayılar kümesi de, Hausdorff uzayı olduğundan $\{5\}$ tek nokta kümesi kapalıdır. $[0,1]$ kapalı aralığı da $\mathbb{R}$'de kapalı bir kümedir. Kapalı kümelerin birleşimi de kapalı olduğundan A kapalıdır. A sınırlı ve kapalı $\Rightarrow$ A kompakttır.

$B=[0,1]\cup\{3,4,\dots,n\}=\underset{\text{kapalı}}{[0,1]}\cup\{3\}\cup\underset{\text{kapalı}}{\{4\}}\cup\dots\cup\{n\}$

Tek nokta kümeleri, $\mathbb{R}$ hausdorff uzayı olduğundan kapalı, birleşimleri de kapalıdır. O halde B kümesi kapalıdır. B sınırlıdır. $(n-1,n+1)$ aralığının alt kümesidir.

O halde B kompakttır.

3 – X kümesinden IR içine bir f fonksiyonu veriliyor. f sürekli olsa bile f(x) görüntüsünün sınırlı olmayabileceğini bir örnekle gösteriniz.

Çözüm // (Sonuç: sürekli bir fonksiyon sınırlı olmayabilir.)

Bir örnek vermeniz yeterli. O halde özel olarak X kümesini reel sayılar kümesi ve fonksiyon olarak da, birim fonksiyonu alalım.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to f(x)=x$ f birim fonksiyonu süreklidir.

Birim fonksiyon altında IR nin görüntüsü IR dir. $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ olur. Reel sayılar kümesi sınırlı değildir. yani görüntüsü olan IR sınırlı değil.

Fonksiyon süreklidir, ama görüntüsü sınırlı değildir.

4 – X kompakt olmasın. X kümesinden IR kümesine bir g fonksiyonu sürekli ve sınırlı olsa dahi sup ve inf değerlerine ulaşamayacağını bir örnekle gösteriniz.

Çözüm // $g(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$ fonksiyonunu alalım. g fonksiyonu sürekli midir?

(3.12. Teorem) $g(x)=\dfrac{\overset{\text{(birim fonk)}}{x}}{\underset{\text{(mutlak değer fonk.)}}{|x|}+1}$ sınırlı ve sürekli olacak ama inf ve sup değerlerini almayacak.

Fonksiyonun süreksiz olması için payda sıfır olmalı yani $|x|+1=0$ olmalı.

$\Rightarrow |x|=-1$ hiçbir zaman olamaz. O halde fonksiyonu tanımsız yapan nokta yoktur.

$g(x)=\dfrac{\overset{\text{birim}}{x}}{\underset{\text{birim}}{x}+\underset{\text{mutlak}}{|x|}}$ de sürekli bir fonksiyondur ve mutlak değer fonksiyonları sürekli, toplamı da sürekli ve bu fonksiyon süreklidir.

$x+|x|=0 \Rightarrow |x|=-x$ olmaz.

$g(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$ sınırlı mıdır?

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1+|x|}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{1+|x|}=-1$$ Eğer (−1,1) aralığına düşerse sınırlıdır.

$g(\mathbb{R})\subset(-1,1)$? $\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}$ için $g(x)\in(-1,1) \Leftrightarrow -1<g(x)<1$ olmalı.

$-1<\dfrac{x}{1+|x|}<1$? $\Rightarrow \left|\dfrac{x}{1+|x|}\right|<1$?

$\forall x \in \mathbb{R}$ olduğunda $x \leq |x| \Rightarrow x < |x|+1$ dir

$\Rightarrow \dfrac{x}{|x|+1} < 1$ ... ① (iki tarafı $|x|+1$'e böl)

$-x \leq |x| \Rightarrow -x < |x|+1$

$\Rightarrow \dfrac{-x}{|x|+1} < 1$ ya da $-1 < \dfrac{x}{1+x}$ ... ②

① ve ② den istenilen elde edilir. Yani $g(\mathbb{R}) \subset (-1,1)$ dir. g sınırlıdır.

$\inf g(x) = -1$ $\sup g(x) = 1$

$-1 \notin (-1,1)$ ve $1 \notin (-1,1)$ olduğundan, fonksiyon sup ve inf değerlerine ulaşmaz. Çünkü $\mathbb{R}$ tanım kümesi kompakt değildir.

$(2,3) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ f, sınırlı ve sürekli olsun. Ama $(2,3)$ açık aralığı kompakt değildir. O halde f, sup ve inf değerlerine ulaşamaz.

A5 – X bir noktasal topolojik uzay olsun. Bunun her sonsuz A alt kümesi kompakt değildir. Gösteriniz.

Çözüm// Her açık örtünün sonlu örtüsü olmalı. Küme sonsuz elemanlı, sonlu örtülerle örtemeyiz. Her tek nokta kümesi açıktır. (Noktasal topolojik uzay olduğundan.)

Verilen esas uzayda sonsuz elemanlı küme ve sonsuz elemanlı kümenin kompakt olmadığını gösterelim.

A kümesi X'in herhangi bir sonsuz alt kümesi olsun. $\forall a \in A$ için noktasal topoloji olduğundan $\{a\}$ tek nokta kümesi açıktır.

$\beta = \{\{a\} \mid a \in A\}$ kümesi A nın açık örtüsü, A kümesi bunların birleşimi olarak yazılabilir.

$A = \{\cup\{a\} \mid a \in A\} = \bigcup_{a\in A}\{a\}$ tek nokta kümelerini A'nın açık örtüsü olarak düşünebiliriz.

A kümesi sonsuz olduğundan bu açık örtüden, sonlu tane alt açık örtü elde edilemez. Yani A kümesi bunların sonlu tanesinin birleşimi olarak yazılamaz. O halde A kompakt değildir. Yani A, bu sonlu tane açık örtünün birleşimi olarak yazılamaz.

6 — X bir Hausdorff uzayı. $A \subset X$ kompakt ve $p \in X - A$ olsun. Bu zaman $p \in G$, $A \subset H$ ve $G \cap H = \emptyset$ olacak şekilde G ve H açık kümeleri vardır.

Çözüm // Alınan herhangi $(\forall a \in A)$ için $p \notin A$ için $p \neq a$ ve $p, a \in X$ dir. X, hausdorff uzayı olduğundan $G_a \cap H_a = \emptyset$ olacak şekilde, a'nın H_a ve p'nin G_a açık komşulukları vardır.

a'yı A kümesine göre sabit bir nokta aldık. O yüzden komşuluk a'ya bağlı. Eğer a noktasına, A kümesini taratırsak $\{\{H_a\} \mid a \in A\}$ açık örtüsü bulunur. (A'nın bir açık örtüsü.)

$A \subset \bigcup_{a \in A} H_a$ 'dır.

$(U_i)_{i \in I}$, X uzayının örtüsü ise $X = \bigcup_{i \in I} U_i$

$(U_i)_{i \in I}$ A " "

yani esas uzayın değil, alt uzayın örtüsü ise

$A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ yazılır.

A kompakt olduğundan, A'nın bu örtüsünün, sonlu alt açık örtüsü bulunabilir. Yani; bu örtüden sonlu tanesini seçebiliriz. Yani;

$A \subset H_{a_1} \cup H_{a_2} \cup \dots \cup H_{a_n}$ --- (1) (n, sonlu sayı)

olur. a'nın H_a komşuluğu için öyle G_a buluyorduk ki $H_a \cap G_a = \emptyset$ idi. Herbir a_i için $(i = 1, 2, \dots, n)$ H_{a_i}'ler komşuluk olduğundan her a_i için p'nin G_{a_i} komşuluklarını elde ederiz ki, $G_{a_i} \cap H_{a_i} = \emptyset$ olur.

$$\left.\begin{array}{l} H_{a_1} \cap G_{a_1} = \emptyset \\ H_{a_2} \cap G_{a_2} = \emptyset \\ \vdots \\ H_{a_n} \cap G_{a_n} = \emptyset \end{array}\right\}$$

a nın kom. → p'nin koms.

Uzayın hausdorff olmasından.

$G = G_{a_1} \cap G_{a_2} \cap \dots \cap G_{a_n}$ diyelim

$p \in G$ dir. Çünkü G_{a_i} lerin hepsine p aittir.

$H = H_{a_1} \cup H_{a_2} \cup \dots \cup H_{a_n}$ diyelim. $A \subset H$ olur. (1) den.

$G \cap H = \emptyset$? $G \cap (H_{a_1} \cup H_{a_2} \cup \dots \cup H_{a_n}) = (G \cap H_{a_1}) \cup \dots \cup (G \cap H_{a_n})$

$\forall a_i$ için $G \subset G_{a_i}$ olduğundan

$G_{a_i} \cap H_{a_i} = \emptyset \Rightarrow G \cap H_{a_i} = \emptyset$ olur.

$\underbrace{(G \cap H_{a_1})}_{\emptyset} \cup \dots \cup \underbrace{(G \cap H_{a_n})}_{\emptyset} = \emptyset$

$G \cap H = \emptyset$ olur. //

7 — $(X,\mathcal{T})$ bir kompakt uzay, $(X,\mathcal{T}^*)$ da bir topolojik Hausdorff uzayı olsun. Eğer $\mathcal{T}^*$ topolojisi, $\mathcal{T}$ topolojisinden kaba ise $\mathcal{T}=\mathcal{T}^*$ olduğunu gösteriniz. ($\mathcal{T}^*\subset\mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{T}=\mathcal{T}^*$?, $\mathcal{T}\subset\mathcal{T}^*$?)

Çözüm// $f: \underset{\text{kompakt}}{X} \longrightarrow \underset{\text{hausdorff}}{Y}$ (sürekli, 1:1, örten)

(iki uzay arasında homeomorfizm varsa bu iki uzay aralarında homeomorfturlar denir.)

f homeomorfizm $\Rightarrow \mathcal{T}_X=\mathcal{T}_Y$ dir.

$\underset{\text{kompakt}}{(X,\mathcal{T})} \xrightarrow{f} \underset{\text{hausdorff}}{(X,\mathcal{T}^*)}$

$x \longrightarrow f(x)=x$ dönüşümü tanımlayalım.

$x\neq y$ ise $f(x)\neq f(y)$ f, birebirdir.//

$\forall y\in X$, $f(x)=y$ olacak şekilde $x\in X$ olmalı. Elemanın kendisini alabiliriz.

f örtendir.// f sürekli?

$\forall U\in\mathcal{T}^*$ açığı alalım. $f^{-1}(U)\in\mathcal{T}$?

$f^{-1}(U)=U$ olduğundan $(\mathcal{T}^*\subset\mathcal{T})$ $f^{-1}(U)=U\in\mathcal{T}$ dur.

O halde f süreklidir.// 3.11. Teoremden f bir homeomorfizmdir.

Buradan $\mathcal{T}=\mathcal{T}^*$ olur. Yani topolojiler eşittir.

8 — Bir X kümesi üzerinde $\mathcal{T}$ ve $\mathcal{T}'$ gibi iki topoloji verilsin. $\mathcal{T}'$, $\mathcal{T}$ topolojisinden ince ve $(X,\mathcal{T}')$ kompakt olsun. Bu zaman $(X,\mathcal{T})$ uzayının da kompakt olduğunu gösteriniz.

Çözüm// X uzayının $\mathcal{T}$ topolojisine göre kompakt olduğunu gösterebilmek için $\mathcal{T}$ topolojisine göre açık olan $\forall (U_i)_{i\in I}$ örtüsünün sonlu bir alt açık örtenini elde etmeliyiz. (I belirtilmezse herhangi sayıdadır.)

$(U_i)_{i\in I}$, $\forall i\in I$ için, $U_i\in\mathcal{T}$ ise $U_i\in\mathcal{T}'$ dür. ($\mathcal{T}\subset\mathcal{T}'$ olduğundan)

$(U_i)_{i\in I}$, $\mathcal{T}'$ topolojisine göre X'in açık örtüsüdür. Oysa X, $\mathcal{T}'$ topolojisine göre kompakttır. Burada ise $(U_i)_{i\in I}$ 'ların X uzayını örten sonlu bir alt açık örteni vardır. O halde $(X,\mathcal{T})$ kompakttır.

9- Bir X kümesi verilsin. τ ile; X kümesi, ϕ küme ve tümleyeni sonlu olan X'in alt kümelerinin ailesini gösterelim. τ ailesinin X üzerinde bir topoloji olduğunu gösteriniz.

Çözüm// $\tau = \{\phi, X, U_i \mid X-U_i \text{ sonlu}, i\in I\}$

$\forall U \in \tau$ olması için $\Leftrightarrow$ $X-U$ sonludur. (Sonlu tümleyenler topolojisi.)

i- $\phi, X \in \tau$

ii- Herhangi sayıda açıkların birleşimi τ ya aittir.

I indisleyen kümesi herhangi sayıda olsun. $\forall (U_i)_{i\in I} \in \tau$ olsun.

$\bigcup\limits_{i\in I} U_i \in \tau$? $\quad X-\bigcup\limits_{i\in I} U_i$ sonlu olmalıdır.

$X-\bigcup\limits_{i\in I} U_i = \bigcap\limits_{i\in I} X-U_i$, $\forall i\in I$ için $X-U_i$ sonludur. O halde, bunların arakesitleri de yine sonlu sayıda olur. Buradan,

$\bigcup\limits_{i\in I} U_i \in \tau$ dur.

iii- I sonlu sayıda indisleyen küme olmak üzere,

$\forall (U_i)_{i\in I} \in \tau$ ise $\bigcap\limits_{i\in I} U_i \in \tau$?

$X-\bigcap\limits_{i\in I} U_i = \bigcup\limits_{i\in I} X-U_i$, $\forall i\in I$ için $U_i\in\tau$ ise $X-U_i$ sonludur. O halde bunların birleşimi de yine sonlu sayıda olur. Buradan,

$\bigcap\limits_{i\in I} U_i \in \tau$ dur.

O halde τ, X üzerinde bir sonlu topolojidir.

(Cofinite Topology ; Sonlu Tümleyenler Topolojisi)

10- X sonsuz elemanlı bir küme olmak üzere bunun üzerine,

$\tau = \{\phi, X, U_i \mid X-U_i \text{ sonlu}, i\in I\}$

topolojisini koyalım. (X,τ) nun bir Hausdorff uzayı olamayacağını gösteriniz.

Çözüm// Kabul edelim ki, (X,τ) Hausdorff uzayı olsun.

$\forall a,b \in X$, $a\neq b$ olsun. $\exists G\in \mathcal{U}(a)$, $\exists H \in \mathcal{U}(b)$ vardır ki,

$G\cap H = \phi$ olur.

(Veya : $G \cap H = \emptyset$ olacak şekilde a'nın bir G, b'nin bir H komşuluğu vardır.)

$G \cap H = \emptyset \Rightarrow \overset{sonsuz}{G} \subset \overline{\cancel{X} - H}^{\,sonlu}$ ve $\overset{sonsuz}{H} \subset \overline{X - G}^{\,sonlu}$ dir. (çelişki)

H ve G açık olduğundan topoloji tanımı gereği, X−H ve X−G sonludur. X sonsuz elemanlı olduğundan H ve G sonsuz elemanlıdır. //

(X sonsuz, X−H sonlu ise H sonludur.
X ″ , X−G ″ ″ G ″)

Örneğin ; IR sonsuz sayıda $IN \subset IR$ alalım. IR − IN sonludur.
$X = \{1, 2, 3, ..., \infty\}$ $G = \{6, 7, 8, ..., \infty\} \Rightarrow X - G = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ sonludur.
sonsuz elemanlı bir küme sonlu elemanlının alt kümesi olamayacağından bu bir çelişkidir.

O halde, X uzayı Hausdorff uzayı olamaz. //

11- ile ilgili bir örnek ;

(X, τ) sonlu tümleyenler topolojik uzayı olsun. Bu uzayın kompakt olduğunu gösteriniz.

Çözüm // X uzayının sonlu tümleyenler topolojisine göre kompakt olduğunu göstermek için, bu topolojiye göre açık olan herhangi sayıdaki bir örtünün sonlu sayıda açık alt örtüsü bulunmalıdır.

$\mathcal{G} = \{G_i\}_{i \in I}$ ailesi X'in bu topolojiye göre açık örtüsü olsun.

$X = \bigcup_{i \in I} G_i$ dir. τ, sonlu tümleyenler topolojisi olduğundan,

$G_0 \in \mathcal{G}$ için $X - G_0$ sonludur.

$X - G_0 = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$

{ $U \in \tau \Leftrightarrow X - U$ sonlu
sonlu tümleyenler topolojisi

$\forall a_k \in X - G_0$ için $\mathcal{G} = \{G_i\}_{i \in I}$ ailesi açık örtü olduğundan,

$a_k \in G_{i_k}$ olacak şekilde $G_{i_k} \in \mathcal{G}$ vardır. Bu $X - G_0$ dan alınan her nokta için yapılabilir.

a_1 noktası için G_{i_1}
a_2 ″ ″ G_{i_2}
⋮ ⋮
a_m ″ ″ G_{i_m} açık örtüsü bulunabilir. Böylece ;

$X - G_0 \subset G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \ldots \cup G_{i_m}$ bulunur.

$X = G_0 \cup (X - G_0) \subset G_0 \cup G_{i_1} \cup \ldots \cup G_{i_m}$

X bu örtülerin sonlu tanesinin birleşimi olarak yazılacağından kompakt olur. $X = G_0 \cup G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \ldots \cup G_{i_m}$ //

11 – Eğer bir (X, τ) topolojik uzayı, bir Hausdorff uzayı değilse X uzayının kompakt bir alt kümesinin kapalı olmasının gerekmediğini bir örnekle gösteriniz.

Çözüm // X sonsuz elemanlı bir küme olmak üzere, X üzerine sonlu tümleyenler topolojisini koyalım. U ile X'in açık, X'den ve ϕ'dan farklı alt kümesini gösterelim.

sonlu tümleyenler topolojisine göre U kompakttır. (örnekte yapıldığı gibi.) $U \subset \bigcup U_i$ topolojiye göre herhangi sayıda açık örtü alıp, bunların tümleyeni sonlu olmalıdır. U kompakt olduğu halde kapalı değildir.

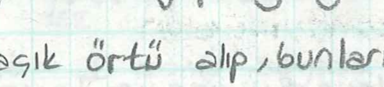
Hausdorff uzayının kapalı alt kümesi kapalı olmayabilir. //

Yerel (Lokal) Kompakt Uzaylar

3.6. Tanım: X bir topolojik uzay olsun. Eğer her $x \in X$ için, x noktasının kompakt bir V komşuluğu varsa, bu uzaya yerel kompakt uzay denir.

1.Örnek // $d(x,y) = |x-y|$ ($\mathbb{R}$'de)

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $V = [x-n, x+n]$, $n \in \mathbb{N}$



V kümesi, kapalı ve sınırlıdır. 3.8 Teoremden dolayı kompakttır. O halde bu uzay yerel (lokal) kompakt uzaydır.

2.Örnek // X noktasal topolojik uzay olsun. $\tau = P(X)$ kuvvet kümesidir.

$\{a\}$ tek nokta kümesi $\forall a \in X$ için kompakttır. $a \in \{a\}$ dır.

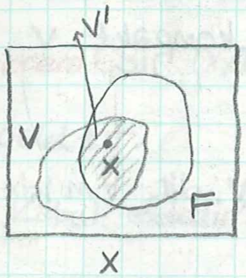
O halde her nokta için yapılacağından, (X, τ) topolojik uzayı, yerel kompakt uzaydır.

3.örnek// Her kompakt X uzayı, yerel kompakt uzaydır.

Kompaktlık, yerel kompaktlıktan daha kuvvetli kavramdır.

3.14. Teorem: Yerel kompakt bir Hausdorff uzayının her kapalı alt uzayı yine yerel kompakttır.

İspat// Kabul edelim ki; F, X'in kapalı bir alt uzayı olsun.



F kapalı, $\forall x \in F$ alalım.

$\Rightarrow$ $x \in X$, X yerel kompakt.

$\Rightarrow$ x'in X'de kompakt bir V komşuluğu vardır.

$V' = V \cap F$ diyelim.

V, X'de kompakt, X bir Hausdorff uzayı ise V, X'de kapalıdır. V' de X'de kapalıdır.

$V' \subset V$, V kompakt olduğundan V' de kompakt olur. Ayrıca bu küme x noktasının, F alt uzayında bir komşuluğudur. (3.7. Teoremden) O halde F yerel kompakttır. //

3.15. Teorem: X bir Hausdorff uzayı, A ve B'de X uzayının iki yerel kompakt alt uzayı olsunlar. Bu taktirde $A \cap B$ kümesi de yerel kompakttır.

İspat// $\forall x \in A \cap B$ alalım $\Rightarrow$ $x \in A$ ve $x \in B$ dir.

A yerel kompakt $\Rightarrow$ x noktasının A'da bir kompakt U komşuluğu vardır. Aynı şekilde;

B yerel kompakt $\Rightarrow$ x noktasının B'de bir kompakt V komşuluğu vardır. $U \cap V$ (3.3. Teoremden) X'de kompakt ve $A \cap B$ bünyesel topolojiye göre kompakttır. Ve yerel kompakttır. //

Yani $A \cap B$ yerel kompakt topolojik uzaydır.

3.16. Teorem: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sonlu tane yerel kompakt uzaylarsa,

$$X = \prod_{i=1}^{n} X_i$$

çarpım topolojik uzayı da yerel kompakttır.

İspat// Kabul edelim ki; X_1, X_2 yerel kompakt uzay olsun. Bunların dik çarpımı $X = X_1 \times X_2$ olsun. Bu uzaydan alınan herhangi bir noktanın komşuluğunu alalım. $\forall m \in X$ alalım.

$$m = (\underset{\in X_1}{x}, \underset{\in X_2}{y}) \in X \quad , \; x \in X_1 , \; y \in X_2$$

X_1 yerel kompakt olduğundan, x'in X_1 de kompakt U komşuluğu vardır. X_2 yerel kompakt olduğundan, y'nin X_2 de kompakt V komşuluğu vardır.

$U \times V$ de $X_1 \times X_2$ de kompakt olur ve $m = U \times V$ dir. $\forall m$ için, X yerel kompakt olur. //

Örnek// $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^n$ yerel kompakttır. (3.16. Teoremden)

Uyarma// 3.10. Teoremi, yerel kompakt uzaylar için söylemek mümkün değildir. Buna bir örnek verelim: (yerel kompakt bir uzayın sürekli bir fonksiyon altındaki görüntüsü yerel kompakt olmayabilir.)

$\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{Z}$ yi alalım. Bunlar sayılabilirdir. $\begin{array}{c} \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Q} \\ n \longrightarrow f(n) \end{array}$, 1:1 ve örten f fonksiyonunu her zaman tanımlayabiliriz. $f(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$ olur. $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Q}$ nun üzerine $\mathbb{R}$ tarafından oluşturulan bünyesel topolojiyi koyalım. $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Q}$ üzerindeki topolojiler noktasal topolojidir. $\forall U \subset \mathbb{Q}$ açığını alalım. $f^{-1}(U) \subset \mathbb{Z}$ dir. O halde f sürekli bir fonksiyondur. $\mathbb{Z}$ yerel kompakttır. Fakat $\mathbb{Q}^{(\star)}$ yerel kompakt değildir. (S.115. 1. Problem, Uygulama)$^{(\star)}$

- Sayılabilir Kompaktlık, Dizisel Kompaktlık -

3.9. Tanım: Bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayının her sayılabilir açık örteni sonlu bir alt açık örtene sahipse buna sayılabilir kompakttır denir.

3.10. Tanım: Bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayındaki her dizi yakınsak bir alt diziye sahipse bu uzaya dizisel kompakttır denir.

3.11. Tanım: $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay, $B \subset X$ olsun. Eğer, bir $x_0 \in X$ için bu x_0 noktasının her komşuluğu B kümesinin sonsuz tane elemanını içeriyorsa, bu x_0 noktasına B kümesinin bir <u>yığılma noktası</u> denir.

3.18. Teorem: Bir $(X,\mathcal{T})$ topolojik uzayının sayılabilir kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul, X kümesinin her sayılabilir sonsuz alt kümesinin en az bir yığılma noktasına sahip olmasıdır.

3.19. Teorem: Bir $(X,\mathcal{T})$ topolojik uzayı dizisel kompaktsa sayılabilir kompakttır.

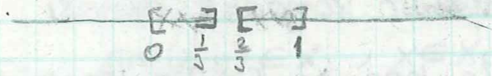
İspat// Kabul edelim ki; $(X,\mathcal{T})$ dizisel kompakt olsun. Ve B kümesi X'in sayılabilir sonsuz alt kümesi olsun.

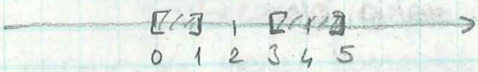
$(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B$, her zaman için böyle bir dizi bulabiliriz. S_n'deki her terim birbirinden farklıdır. Eleman sayısı sonsuzdur. $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin yakınsak bir (S_{n_k}) alt dizisi vardır. Kabul edelim ki, bu (S_{n_k}) dizisi bir y elemanına yakınsasın.

$S_{n_k} \longrightarrow y$, diziye ait, y nin her komşuluğunda sonlu elemanı vardır. O halde y, B'nin yığılma noktasıdır. Teoren 3.18. den dolayı bu uzay sayılabilir kompakttır.

IV. BÖLÜM

– BAĞLANTILI UZAYLAR –





$B = [0,1] \cup [3,5]$

4.1. Tanım : Bir (X,τ) topolojik uzayında X ve $\emptyset$'den başka hem açık hem kapalı hiçbir alt küme yoksa, bu (X,τ) topolojik uzayına <u>bağlantılıdır</u> denir. Eğer bir topolojik uzay bağlantılı değilse, buna da <u>bağlantılı olmayan</u> topolojik uzay denir.

Eğer X ve $\emptyset$ dan başka en az bir tane hem açık hem de kapalı küme varsa, bu topolojik uzaya, <u>bağlantılı olmayan topolojik</u> uzay denir.

$(X$ bağlantılı değildir$) \Leftrightarrow (\exists P,\ P$ hem açık hem kapalı $P \neq X,\ P \neq \emptyset)$

P açık $\Rightarrow X - P = K$ kapalıdır.

P kapalı $\Rightarrow X - P = K$ açıktır.

$X = P \cup K$

Bundan yararlanarak şu sonuçları yazabiliriz.

X'in bağlantılı olmaması için gerekli ve yeterli koşul X ve $\emptyset$ dan farklı iki ayrık açığın birleşimine eşit olmasıdır. Veya,

X'den ve $\emptyset$'dan farklı iki ayrık kapalının birleşimine eşit olmasıdır.

4.2. Tanım : (X,τ) topolojik uzay ve A'da X'in alt uzayı olsun. Eğer A alt uzayında A'dan ve $\emptyset$'dan başka hem açık hem kapalı hiçbir alt küme yoksa bu A alt uzayına <u>bağlantılıdır</u> denir.

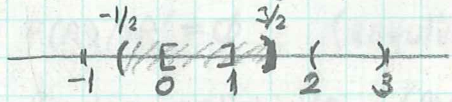
(Alt uzaya göre bağlantılılık, bir topolojik uzaya göre bağlantılılıktan gelmektedir.)

1. örnek// (a,b), $[a,b]$; $\mathbb{R}$ nin bağlantılı uzaylarıdır.

2. örnek// $A=[0,1]\cup(2,3)$ üzerine $\mathbb{R}$ tarafından oluşturulan bünyesel topolojiyi koyalım. A bağlantılı mıdır? Değil midir?

$[0,1]$ kümesini alalım. $\mathbb{R}$'de kapalıdır. $[0,1]\cap A=[0,1]$ dir.

A üzerindeki bünyesel topolojiye göre de kapalıdır.



$(-1/2, 3/2)$ $\mathbb{R}$'de açık kümedir.

$(-1/2, 3/2)\cap A=[0,1]$ dir. O halde $[0,1]$, A'daki bünyesel topolojiye göre açıktır. $[0,1]\neq\emptyset$ $[0,1]\neq A$

O halde A bağlantılı olmayan bir kümedir. (uzaydır.)

4.1. Teorem: (X,T) bir topolojik uzay A 'da X'in bir alt uzayı olsun.

A alt uzayının bağlantılı olmaması için gerekli ve yeterli koşul, $A\subset P\cup Q$, $P\cap Q\subset X-A$ ve $P\cap A\neq\emptyset$, $Q\cap A\neq\emptyset$ olacak şekilde X uzayının P ve Q açık alt kümelerinin bulunmasıdır.

İspat// $\Rightarrow$: Kabul edelim ki A bağlantılı olmasın.

$P'\in A$; P', hem açık hem de kapalıdır. $P'\neq A$, $P'\neq\emptyset$

$A-P'$ hem açık, hem kapalıdır. $A-P'\neq A$, $A-P'\neq\emptyset$

P' açık , $P'=P\cap A$ olacak şekilde X'de bir P açığı vardır.

$A-P'$ açık , $A-P'=Q\cap A$ olacak şekilde X'de bir Q açığı vardır.

$$A=P'\cup(A-P')=\underbrace{(P\cap A)}_{\subset P}\cup\underbrace{(Q\cap A)}_{\subset Q}\subset(P\cup Q)$$

$\Rightarrow A\subset P\cup Q$ olur.//

$(P\cap Q)\cap A=(P\cap A)\cap(Q\cap A)=P'\cap(A-P')=\emptyset$

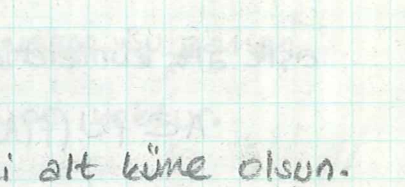
$\Rightarrow P\cap Q\subset X-A$ olur.//

$\Leftarrow$: Tersine, P ve Q teoremdeki koşulları sağlayan iki alt küme olsun.

$P'=P\cap A$, $Q'=Q\cap A$ $P'\neq\emptyset$, $Q'\neq\emptyset$, $P'\neq A$, $Q'\neq A$

$A=A\cap(P\cup Q)=\underbrace{(A\cap P)}_{P'}\cup\underbrace{(A\cap Q)}_{Q'}=P'\cup Q'$

$P'\cap Q'=(P\cap A)\cap(Q\cap A)=A\cap\underbrace{(P\cap Q)}_{\subset X-A}=\emptyset$



$A\cap(P\cap Q)=\emptyset$ //

$P'=A-Q'$ $Q'=A-P'$

$P' = P \cap A$, P', A'daki bünyesel topolojiye göre açıktır.

$Q' = Q \cap A$, Q' " " " " .

O halde $P' \cap Q'$ de açık bir kümedir.

P' açık $\Rightarrow$ Q' kapalıdır. (Bünyesel topolojiye göre)

O halde A bağlantılı değildir. (Q', hem açık hem kapalı, hem $\emptyset$ dan hem de A'dan farklı olduğu için.)

4.2. Teorem: (X, T) bir topolojik uzay A da onun bir alt uzayı olsun. A kümesinin bağlantılı olması için gerekli ve yeterli koşul, X uzayının $A \subset F \cup G$, $F \cap G \subset X - A$ ve $F \cap A \neq \emptyset$, $G \cap A \neq \emptyset$ olacak şekilde F ve G kapalı alt kümelerinin bulunmasıdır.

İspat// Ödev //

☆ 4.3. Teorem: X ve Y iki topolojik uzay ve $f: X \to Y$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer A, X'in bağlantılı bir alt kümesi ise bu zaman $f(A)$'da Y'nin bir bağlantılı alt kümesidir.

İspat// (olmayana ergi metoduyla ispatlayalım.) (Kabul edelim ki A bağlantılı olsun.)

Kabul edelim ki $f(A)$ bağlantılı olmasın. 4.1. Teoremden dolayı,

$f(A) \subset P' \cup Q'$, $P' \cap Q' \subset Y - f(A)$ $P' \cap f(A) \neq \emptyset$ ve $Q' \cap f(A) \neq \emptyset$

olacak şekilde Y'de P' ve Q' açık alt kümeleri vardır.

f sürekli, ve P' ve Q' de Y'de açık ise $f^{-1}(P')$ ve $f^{-1}(Q')$ de X'de açıktır.

$P = f^{-1}(P')$ ve $Q = f^{-1}(Q')$ gösterelim. O halde P ve Q, X'in açık alt kümeleridir.

$$A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(P' \cup Q') = f^{-1}(P') \cup f^{-1}(Q') = P \cup Q$$

$\Rightarrow A \subset P \cup Q$ dur. //

$$P \cap Q = f^{-1}(P' \cap Q') \subset f^{-1}(Y - f(A)) = \underbrace{f^{-1}(Y)}_{X} - \underbrace{f^{-1}(f(A))}_{\supset A} \subset X - A$$

$\Rightarrow P \cap Q \subset X - A$ dır. //

Şimdi iddia ediyoruz ki, $P\cap A \neq \emptyset$ ve $Q\cap A \neq \emptyset$ olduğunu gösterelim.

Eğer $P\cap A=\emptyset$ olsaydı, $A\subset P\cup Q$ olduğundan $A\subset Q$ olur.

$\Rightarrow f(A)\subset f(Q)$ olur. (f altındaki görüntülerini alarak.)

$Q=f^{-1}(Q') \Rightarrow f(Q)=f(f^{-1}(Q'))\subset Q'$

Halbuki, $f(A)\subset P'\cup Q'$ idi. $(P'\cap Q'=\emptyset$ idi$)$

$\Rightarrow f(A)\cap P'=\emptyset$ (kabulümüzde bu arakesit baştan farklı idi.)

Bu ise çelişkidir. (Aynı metodla $f(A)\cap Q'\neq\emptyset$ olduğu gösterilir.)

(O halde 4.1. den dolayı A bağlantılı değildir.) $f(A)$ bağlantılıdır. //

4.3.1. Sonuç: X ve Y iki topolojik uzay, $f:X\to Y$ örten, sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer X bağlantılı bir uzaysa Y'de bağlantılıdır.

$f(X)=Y$ örtendir. (Bir önceki teoremin sonucudur.)

4.3.2. Sonuç: X ve Y homeomorf uzaylar olsunlar. X uzayının bağlantılı olması için gerekli ve yeterli koşul, Y uzayının da bağlantılı olmasıdır.

☆

☆ **4.4. Teorem:** (X,τ) bir topolojik uzay olsun. Aşağıdaki koşullar denktir.

a- X bağlantılıdır.

b- $X=A\cup B$ olacak şekilde X uzayının boş olmayan ayrık ve kapalı alt kümeleri yoktur.

c- X uzayının hem açık hem kapalı alt kümeleri sadece X ve $\emptyset$ tur.

d- Eğer A, X uzayının X ve $\emptyset$ kümelerinden farklı bir alt kümesi ise $A^*\neq\emptyset$ olur.

e- $Y=\{0,1\}$ kümesi üzerine noktasal topolojiyi koyalım. Bu zaman X uzayından Y uzayına sürekli ve örten bir fonksiyon yoktur.

İspat// $(a\Leftrightarrow b\ ,\ b\Leftrightarrow c\ ,\ a\Leftrightarrow c)$

$\underline{c\Rightarrow d}$ 'yi ispatlayalım. Bunun için $d'\Rightarrow c'$ i ispatlayalım.

Kabul edelim ki; A, X uzayının X ve $\emptyset$ kümelerinden farklı ve $A^*=\emptyset$ koşulunu sağlayan bir alt küme olsun.

$\bar{A} = \mathring{A} \cup \underset{\phi}{A^*} = \mathring{A}$ $\quad \{ \mathring{A} \subset A \subset \bar{A}$

$\Rightarrow A = \mathring{A} = \bar{A}$

O halde A, X den ve ϕ dan farklı hem açık hem de kapalıdır.

Ve $d' \Rightarrow c'$ olur. Bu ise $c \Rightarrow d$ olur. //

$d \Rightarrow a$ halini ispatlayalım. $a' \Rightarrow d'$ yi ispatlamak gerekir.

$X = A \cup B$ olacak şekilde boş olmayan, X'den farklı iki ayrık A ve B açığı vardır. A ve B aynı zamanda kapalıdır. Bunlardan sadece A'yı alalım. A hem açık hem de kapalı olduğundan $A = \mathring{A} = \bar{A}$ dır.

$A^* = \bar{A} - \mathring{A}$ idi. $A^* = A - A = \phi$ bu ise d' olur.

Dolayısıyla $d \Rightarrow a$ olur. //

$a \Rightarrow e$ halini ispatlayalım. $T = \{Y, \{0\}, \{1\}\}$ $\quad f(X) = Y$

X bağlantılı olsun. $X \xrightarrow[\text{sürekli}]{f} Y$ fonksiyonunun varlığını ispatlayalım.

Y bağlantılı olmalı. $Y = \{0\} \cup \{1\}$
hem açık hem kapalıdırlar.

O halde böyle örten, sürekli fonksiyon yoktur.

$e \Rightarrow a$ halini ispatlayalım.

Kabul edelim ki X bağlantılı olmasın. $X = A \cup B$ olacak şekilde A ve B ayrık açıkları vardır. $A \neq \phi$, $B \neq \phi$, $A \neq X$ ve $B \neq X$ olur.

$g: X \to Y$ $\quad g(x) = \begin{cases} 0, & x \in A \text{ ise} \\ 1, & x \in B \text{ ise} \end{cases}$ $\quad$ g örtendir.

$g^{-1}(\{0\}) = \underset{\text{açık}}{A}$, $g^{-1}(\{1\}) = \underset{\text{açık}}{B}$, $g^{-1}(Y) = \underset{\text{açık}}{X}$ $\quad$ O halde g süreklidir.

Bu ise e' olur. Yani $a' \Rightarrow e'$ dir. O halde $e \Rightarrow a$ ispatlanır. //

– UYGULAMA –

1- Q rasyonel sayılar kümesi üzerine IR tarafından oluşturulan bünyesel topolojiyi koyalım. Q uzayının yerel kompakt olmadığını gösteriniz.

Çözüm // Kabul edelim ki, Q lokal kompakt olsun. Bu taktirde $0 \in Q$ nun kompakt bir komşuluğu vardır. Bu komşuluğa V' diyelim. (V', Q da kompakt.)

$V' = V \cap \mathbb{Q}$ olacak şekilde 0'ın $\mathbb{R}$'de V kompakt komşuluğu vardır.

(Alt uzay ve üst uzayın arakesitini alıyoruz.) Reel sayılar kümesinde $V \in \mathcal{U}(0)$ olduğuna göre $[-a,a] \subset V$ olacak şekilde $\mathbb{R}$'de $[-a,a]$ kapalı kümesi vardır. (Her iki tarafı $\mathbb{Q}$ ile kesiştirelim.)

$$A = \underbrace{[-a,a]}_{\text{(üst uzay) } \mathbb{R}\text{de kapalı}} \cap \mathbb{Q} \subset \underbrace{V \cap \mathbb{Q}}_{\text{alt uzay}} = V'$$

A kümesi $\mathbb{Q}$ da kapalıdır. (Alt uzayın kapalı kümesi tanımından.)

Elimizde $\underset{\text{kapalı}}{A} \subset \underset{\text{kompakt}}{V'}$ var $\Rightarrow$ A kompakttır. (3.7. Teorem: X uzayının kapalı her alt uzayı yine kompakttır.)

$\mathbb{R} = \underset{\text{rasy.}}{\mathbb{Q}} \cup \underset{\text{irrasy.}}{I}$ $\qquad [-a,a]$, $\mathbb{R}$'de kapalı. (Bu kümede rasy ve irrasyonel sayı var.)

$\forall x \in [-a,a]$ ile $[-a,a]$ daki irrasyonel sayı olsun.

$x \in A$ mıdır? $x \notin A$ dır. $(\mathbb{Q} \cap I = \emptyset)$

(Hiçbir zaman irrasyonel sayı, rasyonel bir sayıya ait olamaz.)

$\forall n$ için, $F_n = A \cap [x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}]$ $n \in \mathbb{N}$ kümesini tanımlayalım.

Bu küme kapalı mıdır? A kapalı ve $[x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}]$ kapalı, dolayısıyla arakesiti kapalıdır. O halde F_n kapalıdır. F_n kapalı ve azalan olur. (n'e değer verdiğimizde, n büyüdükçe küme küçülür.)

Teorem 3.1'in 3. şıkkını kullanırsak,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A \cap [x-\tfrac{1}{n}, x+\tfrac{1}{n}] = A \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} [x-\tfrac{1}{n}, x+\tfrac{1}{n}]\right) = A \cap \{x\} = \emptyset$$

ve $F_n \subset A$ olur. ($\forall n \in \mathbb{N}$ için) A nın kompakt olması ile çelişir.

Başta $\mathbb{Q}$'yu yerel kompakt olarak almıştık. Bu da çelişir. O halde $\mathbb{Q}$ yerel kompakt değildir.

3- $A = (0,1)$ açık aralığının $\mathbb{R}$ kümesindeki alışılmış topolojiye göre dizisel kompakt olmadığını gösteriniz.

Çözüm// ($\mathbb{R}$ deki alışılmış topoloji mutlak değer metriğidir.)

(X,τ) topolojik uzayının dizisel kompakt olması için, her dizinin yakınsak bir alt dizisi olmalı ve <u>yakınsadığı eleman</u> bu uzaya (A kümesine) ait olmalı.

$A=(0,1)$ aralığında, $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$ dizisini alalım.

$n\to\infty$ için $\frac{1}{n}$ dizisinin limiti 0 olur. Yani $(\frac{1}{n})$ dizisi 0 noktasına yakınsar. Fakat $0\notin A$ olduğundan A dizisel kompakt değildir.

($[0,1)$ olsaydı $0\in A$ olduğundan, dizisel kompakt olurdu.)

4- $[a,b]$ kapalı ve sınırlı aralığı sayılabilir kompakttır.

Çözüm// $\mathbb{R}$ deki her sınırlı ve kapalı aralık sayılabilir kompakttır. örneğin; $[0,1]$ aralığı. Bunun için 3.18. Teoremi kullanacağız.

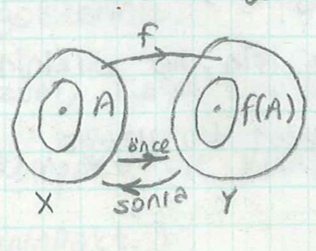
$B\subset A$ sayılabilir ve sonsuz alt kümesi olsun. A sınırlı olduğundan B'de sınırlıdır. B sınırlı ve aynı zamanda sonsuz elemanlı bir küme olduğundan Balzano-Weierstrass teoreminden B bir yığılma noktasıdır. (Balzano-Weierstrass; $\mathbb{R}$'de sınırlı ve sonsuz (elemanlı) bir küme en az bir yığılma noktasına sahiptir.) B en az bir yığılma noktasına sahiptir. Bu yığılma noktasına p diyelim. A kapalı olduğundan yığılma noktası olan p'yi içerir. O halde $p\in A$ dır. (A kapalı olduğundan bir yığılma noktası içerir.) O halde 3.18'den dolayı A kümesi sayılabilir kompakttır.

5- Dizisel kompakt bir kümenin sürekli bir fonksiyon altındaki görüntüsünün de dizisel kompakt olduğunu gösteriniz.

Çözüm// X ve Y iki topolojik uzay olsun. $f: X\to Y$ sürekli olsun. $A\subset X$ dizisel kompakt bir küme olsun. Göstereceğiz ki; $f(A)\subset Y$ dizisel kompakttır. (görüntüsü de dizisel kompakttır.)

$f(A)$ dan aldığımız her dizinin yakınsak bir alt dizisi olmalı. O halde $f(A)$ kümesinde $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ gibi bir dizi alalım. (Bu dizinin bir alt dizisi olduğunu göstereceğiz.)

Görüntü tanımından; $f(a_1)=b_1$ o.ş.'de $a_1\in A$ vardır.
$f(a_2)=b_2$ o.ş.'de $a_2\in A$ "
$\vdots$
$f(a_n)=b_n$ o.ş.'de $a_n\in A$ "



$\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ A'da bir dizi olur.

A dizisel kompakt olduğundan $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ dizisinin yakınsak bir alt dizisi vardır. Bu yakınsak alt diziyi $\{a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_n}, ...\}$ gösterelim. Bunlar A'daki bir elemana yakınsar. (A dizisel kompakt olduğundan) $(a_i)_{i\in I}$ alt dizisi bir $a\in A$ 'ya yakınsar.

İddia ediyoruz ki, $f(a_i)=b_i$ alt dizisi de $f(a)=b$ 'ye yakınsar. (a_i'yi (a_n) dizisi ile, b_i'yi (b_n) dizisi ile gösteriyoruz.)

Hatırlatma: (X,T) da $x_n \to x$ yakınsaması $\forall U\in \mathcal{U}(x)$ için içinde sonsuz, dışında sonlu tane eleman olur.

Kabul edelim ki, (b_i) alt dizisi b'ye yakınsamasın. Öyle bir, $U\in \mathcal{U}(b)$ komşuluğu vardır ki, U'nun içinde (b_i) alt dizisinin sonlu, dışında ise sonsuz tane elemanı vardır. f sürekli olduğundan $f^{-1}(U)$ 'da a noktasının komşuluğu olur.

Böylece $f^{-1}(U)$ da (a_i) alt dizisinin sonlu elemanı, dışında ise sonsuz tane elemanı vardır. Burada (a_i) alt dizisi a noktasına yakınsamaz. Oysa a_i nin yakınsaklığı ile çelişir. (b_i) alt dizisi b noktasına yakınsar. Böylece $f(A)$ dizisel kompakttır.

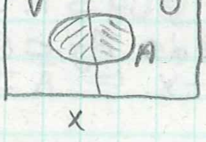
6 - $A=(0,1)$ kümesinin sayılabilir kompakt olmadığını gösteriniz.

Çözüm // 3.18. Teoremini kullanacağız.

$B=\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\}\subset A$ 'nın sonsuz elemanlı sayılabilir bir alt kümesi olsun. $n\to\infty$ ise $\frac{1}{\infty}=0$ olur. 0 noktası B'nin yığılma noktasıdır. $0\notin A$ dır. O halde A sayılabilir kompakt değildir.

Vize Sonu //

4.5. Teorem: (X,T) bir topolojik uzay, U ve V'de $X=U\cup V$ koşulunu sağlayan X uzayının boş olmayan ayrık açık alt kümeleri olsunlar. Eğer A, X uzayının bağlantılı bir alt uzayı ise bu zaman $A\subset U$ veya $A\subset V$ dir.

İspat // 

$A\cap U\neq\emptyset$, $A\cap V\neq\emptyset$ olsunlar. $A\cap U$ ve $A\cap V$ A'daki bünyesel topolojiye göre açıktır.

$(A\cap U)\cup(A\cap V) = A\cap(\underbrace{U\cup V}_{X}) = A$

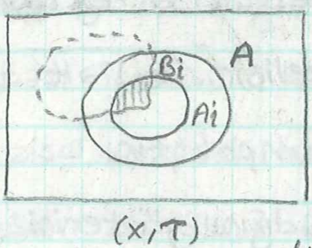
$(A\cap U)\cap(A\cap V) = A\cap(\underbrace{U\cap V}_{\emptyset}) = \emptyset$

$A\cap V \neq A$, $A\cap U \neq \emptyset$ O halde A bağlantılı değildir. Bu ise kabulümüzle çelişir. Bu nedenle $A\cap U=\emptyset$ buradan $A\subset V$ veya $A\cap V=\emptyset$ bunun sonucu $A\subset U$ elde edilir.

($A\cap U=\emptyset \Rightarrow A\subset U\cup V \Rightarrow A\subset V$ veya,
$A\cap V=\emptyset \Rightarrow A\subset U\cup V \Rightarrow A\subset U$ olur.)

4.6. Teorem: Bir X topolojik uzayı ile onun alt uzaylarının bir $(A_i)_{i\in I}$ ailesi verilmiş olsun. Eğer her A_i bağlantılı ve $i,j\in I$ için $A_i\cap A_j\neq\emptyset$ ise $A=\bigcup_{i\in I} A_i$ kümesi de bağlantılıdır. $(A_i\subset A)$

İspat// A bağlantılı olmasın. A alt uzayında B' ve B'' açık alt kümeleri vardır ki $(B'\neq X,\ B'\neq\emptyset,\ B''\neq X,\ B''\neq\emptyset)$ bunların $B'\cap B''=\emptyset$ ve $B'\cup B''=A$ olur. $\forall A_i$ bağlantılı uzayını alalım. $A_i\cap B'$, $A_i\cap B''$ Her ikisi de A_i'deki bünyesel topolojiye göre açıktır.



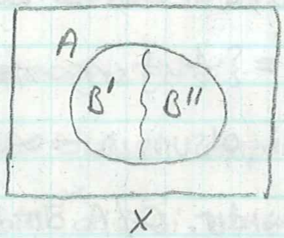
(Bak 2.73. Teorem)

$$(A_i\cap B')\cup(A_i\cap B'') = A_i\cap(\overbrace{B'\cup B''}^{A}) = A_i$$

$B'\cap B''=\emptyset$ dan,

$$(A_i\cap B')\cap(A_i\cap B'') = A_i\cap(\overbrace{B'\cap B''}^{\emptyset}) = \emptyset \quad \text{bulunur.}$$

A_i bağlantılı olduğundan, $A_i\cap B'\neq\emptyset$ veya $A_i\cap B''=\emptyset$ olur. (ya A_i, B' içinde, ya da B'' içindedir.)



Kabul edelim ki $A_i\cap B'=\emptyset$ olsun.

$A_i\subset A=B'\cup B'' \Rightarrow A_i\subset B''$ olur. Bir başka A_j alalım. Aynı koşullarda A_j bağlantılı olduğundan, ya $A_j\cap B'=\emptyset$ ya da $A_j\cap B''=\emptyset$ olur.

Eğer $A_j\cap B''=\emptyset$ olsaydı $A_j\subset A\subset B'\cup B'' \Rightarrow A_j\subset B'$ olurdu.

Halbuki, $\forall i,j$ için $A_i\cap A_j\neq\emptyset$ olur. Böylece $B'\cap B''=\emptyset$ olur.

O halde A_i nerede ise A_j de orada olmak zorundadır. $A_j\subset B''$ olur.

$\forall A_j$ için doğru olacağından $A = \bigcup_{i \in I} A_i \subset B''$ olur. Tüm elemanlar B'' içindedir ve $A \subset B''$ olur. Halbuki biz, $A = B' \cup B''$, $B' \neq \emptyset$, $B'' \neq \emptyset$ dedik. $A \subset B'' \Rightarrow B' = \emptyset$ olur. O halde $A_i \cap B' \neq \emptyset$ olur. (Bu çelişkidir.)

O halde A bağlantılıdır.

4.7. Teorem: (X, T) bir topolojik uzay, A da X'in bağlantılı bir alt kümesi olsun. Eğer $A \subset B \subset \bar{A}$ kapsaması varsa B alt kümesi de bağlantılıdır.

İspat// Kabul edelim ki B bağlantılı olmasın. Göstereceğiz ki A'da bağlantılı değildir. 4.1. Teoremden, $P \cap Q \subset X - B$, $B \subset P \cup Q$, $P \cap B \neq \emptyset$ ve $Q \cap B \neq \emptyset$ olacak şekilde X'in P ve Q açık alt kümeleri vardır.

$A \subset B \subset P \cup Q \Rightarrow A \subset P \cup Q$

$A \subset B \Rightarrow X - A \supset X - B \supset P \cap Q$ yani $P \cap Q \subset X - A$ olur.

İddia ediyoruz ki, $P \cap A \neq \emptyset$ ve $Q \cap A \neq \emptyset$ tur. Gösterelim.

Diyelim ki, $P \cap A \neq \emptyset$ olsun. O halde $A \subset \underset{\text{kapalı}}{X - \underset{\text{açık}}{P}}$ olur.

$X - P$ kapalıdır.

$\bar{A} \subset X - P \Rightarrow P \cap \bar{A} = \emptyset$ $\quad P \cap B = \emptyset$ olur. (çelişki)

O halde kabulümüz yanlıştır. $P \cap A \neq \emptyset$ olur.

(Aynı mantıkla $Q \cap A \neq \emptyset$ olduğunu gösterebiliriz.)

O halde 4.1. Teoremden A bağlantılı değildir. $(p \Rightarrow q \equiv q' \Rightarrow p')$

Teorem ispatlanmış olur. //

4.7.1. Sonuç: Bağlantılı bir kümenin kapanışı da bağlantılıdır.

İspat// Eğer $\bar{A}$ bağlantılı olmasaydı, $P \cap Q \subset X - \bar{A}$, $\bar{A} \subset P \cup Q$

$P \cap \bar{A} \neq \emptyset$, $Q \cap \bar{A} \neq \emptyset$ olacak şekilde X'in P ve Q açık alt kümeleri vardır. (A bağlantılı $\Rightarrow \bar{A}$ bağlantılı yerine $\bar{A}' \Rightarrow A'$ kullanalım)

$A \subset \bar{A} \subset P \cup Q \Rightarrow A \in P \cup Q$

$A \subset \bar{A} \Rightarrow X - A \supset X - \bar{A} \supset P \cap Q \Rightarrow P \cap Q \subset X - A$

Göstereceğiz ki, $P \cap A \neq \emptyset$ ve $Q \cap A \neq \emptyset$ tur. Kabul edelim ki

$P \cap A = \emptyset$ olsun. $\Rightarrow A \subset \underbrace{X - \overset{açık}{P}}_{kapalı} \Rightarrow \bar{A} \subset X - P$

$\bar{A} \cap P = \emptyset$ o halde $P \cap A \neq \emptyset$ olur.

Aynı şekilde $Q \cap A \neq \emptyset$ olur.

4.7.2. Sonuç: Eğer $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayı her yerde yoğun bir bağlantılı alt uzay içerirse bu takdirde X uzayı da bağlantılıdır.

İspat// $\bar{A} = X$ ve A bağlantılı olsun. 4.7 Teoremden X 'de bağlantılıdır.

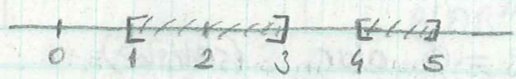
- Reel Sayılar Kümesi Üzerindeki Bağlantılılık -

4.3. Tanım: Bir $A \subset \mathbb{R}$ verilsin. Eğer A kümesinin en az farklı iki noktası varsa ve $a < b$ koşulunu sağlayan her $a, b \in A$ için $a < x < b$ olan tüm x noktaları A'ya aitse A kümesine $\mathbb{R}$'de bir <u>aralık</u> denir.

Örnek// $[1, 3] = A$ aralık mıdır? $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ $\frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}$ $x \in A$ dır.

O halde A kümesi aralıktır.

Örnek// $[1, 3] \cup [4, 5] = A$ kümesi aralık mıdır?



$2 \in A$, $\frac{9}{2} \in A$ $2 < \frac{7}{2} < \frac{9}{2}$

$\frac{7}{2} \notin A$ dır. O halde aralık değildir.

$[a, b] \Rightarrow$ kapalı aralık,

$(a, b) \Rightarrow$ açık aralık,

$(a, b], [a, b) \Rightarrow$ yarı açık aralık.

4.8. Teorem: Bir $A \subset \mathbb{R}$ kümesinin bir aralık olması için gerekli ve yeterli koşul; $(a, b]$, $[a, b]$, $[a, b)$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, (a, ∞), $[a, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$, (a, b) kümelerinden birine eşit olmasıdır.

4.9. Teorem: $\mathbb{R}$'nin en az iki nokta içeren bir A alt uzayının bağlantılı olması için gerekli ve yeterli koşul aralık olmasıdır.

(ispatları yapılmayacaktır.)

$[3, 5] \cup \{8\}$ bağlantılı değil, aralık değil.

4.10. Teorem: (Ara Değer Teoremi):

$f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $f(a) \neq f(b)$ olsun. Bu taktirde $f(a) < M < f(b)$ koşulunu sağlayan her M reel sayısı için $f(m)=M$ olacak şekilde bir $m \in [a,b]$ sayısı vardır.

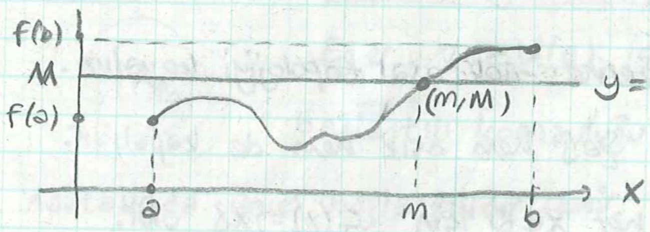
İspat// $[a,b]$ aralığı bağlantılıdır. (aralık olduğundan bağlantılıdır.)

4.9. Teoremden. f sürekli olduğundan $f([a,b])$ de bağlantılıdır.

O halde $f([a,b])$ bir aralıktır. $f(a) \in f([a,b])$, $f(b) \in f([a,b])$ dir.

$f(a) < M < f(b)$ olduğundan $M \in f([a,b])$ dir.

$\Rightarrow \exists m \in [a,b] : f(m) = M$ olur.



(Geometrik yorumudur.)

4.10.1. Sonuç: $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli olsun. Eğer $f(a) \cdot f(b) < 0$ ise bu zaman $f(x)=0$ olacak şekilde bir $x \in [a,b]$ vardır.

4.11. Teorem: (Sabit Nokta Teoremi):

$f:[0,1] \longrightarrow [0,1]$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu zaman $f(z)=z$ olacak şekilde bir $z \in [0,1]$ noktası vardır.

İspat// Eğer $f(0)=0$ veya $f(1)=1$ ise teorem doğrudur. (ispat tamamdır.)

$f(0)>0$, $f(1)<1$ olduğunu kabul edelim. $g:[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longrightarrow g(x) = x - f(x)$

g sürekli bir fonksiyondur.

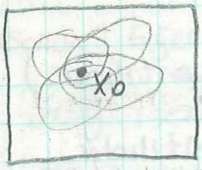
$$\left.\begin{array}{ll} g(0) = 0 - f(0) = -f(0) < 0 & \text{olur.} \\ g(1) = 1 - \underbrace{f(1)}_{<1} = >0 & \text{olur} \end{array}\right\} \Rightarrow g(0) \cdot g(1) < 0 \text{ dır.}$$

4.10.1. Sonuçundan $g(z)=0$ olacak şekilde $z \in [0,1]$ vardır.

$g(z) = z - f(z) = 0 \Rightarrow f(z) = z$ olur. Bu ise teoremin ispatıdır.

Bir Topolojik Uzayın Bağlantılı Bileşenleri

4.4. Tanım: (X,T) bir topolojik uzay, $X_0 \in X$ olsun. X_0 noktasını içeren X'in tüm bağlantılı alt kümelerinin birleşimini $C(X_0)$ ile gösterelim. Buna X_0 noktasının <u>bağlantılı bileşeni</u> denir.



(X,T)

4.6. Teoremden dolayı $C(X_0)$ bağlantılı bir kümedir.

$$\left.\begin{array}{l} \overline{C(X_0)} \subset C(X_0) \\ C(X_0) \subset \overline{C(X_0)} \end{array}\right\} \Rightarrow C(X_0) = \overline{C(X_0)} \quad \text{(kapalı kümedir.)}$$

1. Örnek // Eğer (X,T) bağlantılı bir topolojik uzaysa $\forall X_0 \in X$ noktasının bağlantılı bileşeni X'in kendisidir.

2. Örnek // Q, Rasyonel sayılar kümesi üzerine noktasal topolojiyi koyalım. $a \in Q$ alalım. $\{a\} \neq \emptyset$, $\{a\} \neq Q$ $\{a\}$ hem açık hem de kapalıdır. O halde Q bağlantılı değildir. Yani her $x \in Q$ için $C(x) = \{x\}$ olur.

3. Örnek // $R - \{x\}$ uzayında bağlantılı bileşenler $(-\infty, x)$ ve $(x, +\infty)$ kümeleridir.

(X,T) topolojik uzayı üzerinde bir R bağıntısını; $x_1, x_2 \in X$ olmak üzere, $x_1 R x_2 \Leftrightarrow$ (x_1 ve x_2 noktalarını içeren X'in bağlantılı bir alt kümesi varsa) biçimindeki bağıntı, bir <u>denklik bağıntısıdır.</u>

i- $x R x$

ii- $x_1 R x_2 = x_2 R x_1$

iii- $x_1 R x_2$ ve $x_2 R x_3$ olsun. $x_1 R x_3$?

$x_1 R x_2 \Leftrightarrow x_1 \in U$ ve $x_2 \in U$ (o.ş. U bağlantılı kümesi vardır.)

$x_2 R x_3 \Leftrightarrow x_2 \in V$ ve $x_3 \in V$ (" V " " ")

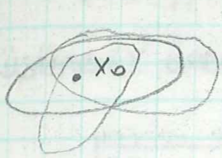
$U \cup V = W$ diyelim $U \cap V = x_2$ olur. $x_2 \in U \cap V \Rightarrow U \cap V \neq \emptyset$

Teorem 4.6.'dan W'da bağlantılıdır.

$x_1 \in W$ ve $x_3 \in W \Rightarrow x_1 R x_3$ olur.

O halde R bağıntısı, bir denklik bağıntısıdır.

$\forall x_0 \in X$ alalım. $[x_0] = \{x \in X \mid x R x_0\}$



Bu bağlantılı kümelerin hepsinin birleşimi (x_0'ı içerdiğinden) $C(x_0)$'ı verir. Bağlantılı bileşen ile verilen noktanın denklik sınıfları aynı şeylerdir.

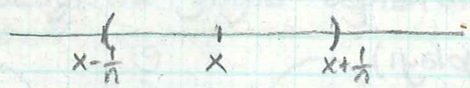
Yerel (Lokal) Bağlantılı Uzaylar

4.5. Tanım: (X,T) bir topolojik uzay ve $a \in X$ olsun. Eğer a noktası bağlantılı kümelerden meydana gelen bir komşuluklar tabanına sahipse X topolojik uzayı a noktasında <u>yerel bağlantılıdır</u> denir.

Eğer X topolojik uzayı her noktada yerel bağlantılı ise bu topolojik uzaya <u>yerel bağlantılıdır</u> denir.

Eğer $\forall U \in \mathcal{U}(a)$ için $V \subset U$ olacak şekilde $V \in \mathcal{U}(a)$ bağlantılı komşuluğu varsa (X,T) topolojik uzayı a noktasında yerel bağlantılıdır denir.

1. Örnek// $\mathbb{R}$ bir yerel bağlantılı uzaydır. (Bağlantılı kümelerden meydana gelen komşuluklar tabanı var.)



2. Örnek// X üzerine T noktasal topolojisi koyalım. $\forall a \in X$ için (her tek nokta kümesi bağlantılıdır.) $\{a\}$ bağlantılıdır. $\forall a \in X$ için $\forall U \in \mathcal{U}(a)$ verilsin.
$a \in \{a\} \subset U$ <u>bu topolojik uzay</u> a noktasında yerel bağlantılıdır.
Bunu her nokta için yapabileceğimiz için X yerel bağlantılıdır.

4.12. Teorem: Bir (X,T) topolojik uzayı verilsin. Aşağıdaki özellikler denktir.

a- X yerel bağlantılıdır.

b- X topolojik uzayının her açık alt uzayının her bağlantılı bileşeni açıktır.

c- Eğer C, X'in bir Y alt uzayının bir bağlantılı bileşeni ise $C^* \subset Y^*$ kapsaması vardır.

İspat// $a \Rightarrow c$. $\forall x \in C^*$ alalım. O halde $x \in \overline{C}$ ve

$C \subset Y \Rightarrow \overline{C} \subset \overline{Y} \Rightarrow x \in \overline{Y}$ olur.

$\overline{Y} = \overset{\circ}{Y} \cup Y^*$ Eğer $x \notin Y^*$ olsaydı $x \in \overset{\circ}{Y}$ olurdu

x yerel bağlantılı ve $\overset{\circ}{Y}$ de x'in bir komşuluğu olduğundan (yerel bağlantılılık tanımı gereği) $x \in U \subset \overset{\circ}{Y}$ olacak şekilde bir $x \in U$ bağlantılı komşuluğu vardır.

$\underset{\text{bağlantılı}}{x \in U}$ ve $\underset{\text{bağlantılı}}{x \in C^*} \Rightarrow U \cap C^* \neq \emptyset$ olur $\Rightarrow U \cup C$ bağlantılıdır.

$x \in U \cup C$ dir. $C \subset U \cup C$ olamaz. O halde

$\Rightarrow U \cup C = C$ dir $\Rightarrow x \in U \subset C \Rightarrow x \in \overset{\circ}{C}$

Bu ise $\overset{\circ}{C} \cap C^* = \emptyset$ olmasıyla çelişir. Bunun sonucu $x \notin \overset{\circ}{Y}$ ve $x \in Y^*$ olur. O halde $C^* \subset Y^*$ elde edilir.

$c \Rightarrow b$. Kabul edelim ki U, X'in açık bir alt uzayı ve C'de onun bağlantılı bir bileşeni olsun.

$C^* \subset U^*$ olsun. (C'den dolayı)

$\Rightarrow C \cap C^* \subset \underbrace{\overset{U}{\overset{\parallel}{\overset{\circ}{U}}} \cap U^*}_{\emptyset}$ (kabulden dolayı)

U açık $\Rightarrow U = \overset{\circ}{U}$ ve $\overset{\circ}{U} \cap U^* = \emptyset$ olur.

$C \cap C^* = \emptyset$ olur. O halde $C = \overset{\circ}{C}$ olur ve C açıktır. //

$b \Rightarrow a$. Herhangi bir $x_0 \in X$ ve $\forall U \in \mathcal{U}(x_0)$ komşuluğunu alalım.

$x_0 \in \overset{\circ}{U} \subset U \Rightarrow \underset{\text{açık alt uzay.}}{\overset{\circ}{U}}$ açıktır. $x_0 \in \overset{\circ}{U}$

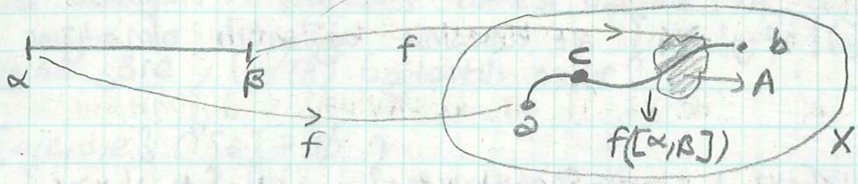
$C(x_0) \subset \overset{\circ}{U}$ olur. yerel bağlantılılık tanımından, (X,T) yerel bağlantılı bir uzay olur.

$(a \Leftrightarrow b)$ $(a \Leftrightarrow c)$ $(b \Leftrightarrow c)$

Yayla Bağlantılı Topolojik Uzaylar

4.6. Tanım: X bir topolojik uzay, $a, b \in X$ olsun. Bir $[\alpha, \beta]$ aralığından X uzayına giden ve $a = f(\alpha)$, $b = f(\beta)$ koşulunu sağlayan her sürekli f fonksiyonuna a noktasını b noktasına bağlayan bir <u>yay</u> veya <u>yol</u> denir.

Yine f, X topolojik uzayı üzerinde bir yaysa $f([\alpha,\beta])$ görüntüsüne X üzerinde bir eğri denir.



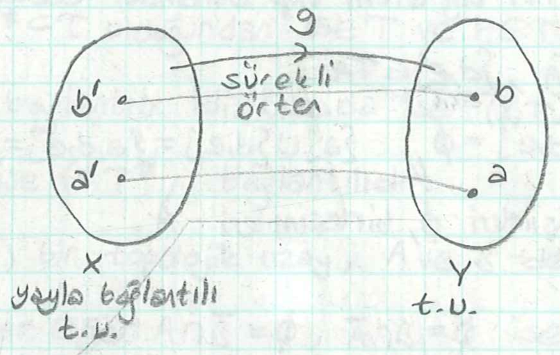
Eğer $c\in X$ noktası verildiğinde, $c\in f([\alpha,\beta])$ ise (eğri üzerinde ise) bu taktirde f yayı c noktasından geçiyor denir.

$A\subset X$ verilsin. Eğer $A\cap f([\alpha,\beta])\neq\emptyset$ oluyorsa f yayı A kümesine rastlıyor denir.

4.7. Tanım: X bir topolojik uzay olsun. Eğer $\forall a,b\in X$ için bu noktaları birbirine bağlayan bir f yayı varsa, bu X topolojik uzayına yayla bağlantılı topolojik uzay denir.

4.13. Teorem: Y bir topolojik uzay, X yayla bağlantılı bir topolojik uzay olsun. Eğer $X\xrightarrow{g}Y$ sürekli ve örten bir g fonksiyonu varsa, Y topolojik uzayı da yayla bağlantılıdır.

İspat//



$\forall a,b\in Y$ verilsin. O halde $g(a')=a$ ve $g(b')=b$ olacak şekilde $a',b'\in X$ vardır.

X yayla bağlantılı olduğundan bir $[\alpha,\beta]$ aralığında (X'de) bir f yayı vardır.

$$(gof)\alpha=g(f(\alpha))=g(a')=a \qquad \left\{\begin{array}{l} f(\alpha)=a' \\ f(\beta)=b' \end{array}\right\}$$
$$(gof)\beta=g(f(\beta))=g(b')=b$$

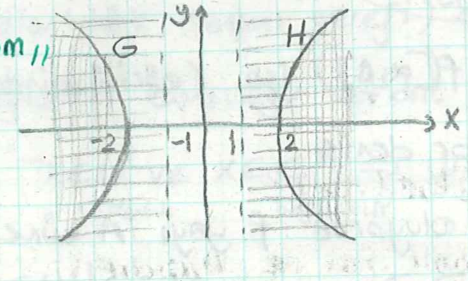
gof süreklidir. Ve a yı b'ye bağlayan bir yaydır.

Bu nedenle Y topolojik uzayı da yayla bağlantılıdır.

UYGULAMA (S. 135)

1 – $\mathbb{R}^2$ üzerine Pisagor metriği tarafından oluşturulan topolojiyi koyalım. $\mathbb{R}^2$ uzayının $A=\{(x,y) \mid x^2-y^2 \geq 4\}$ alt kümesinin bağlantılı olmadığını gösteriniz.

Çözüm //



$G=\{(x,y) \mid x<-1\}$ ve $H=\{(x,y) \mid x>1\}$ kümeleri $\mathbb{R}^2$ nin açık iki kümesidir.

$A \subset G \cup H$ (1) $\quad G \cap H = \emptyset$ olur.

Yine $G\cap A$, $H \cap A$ kümeleri A alt kümesindeki bünyesel topolojiye göre açık ; $G\cap A \neq \emptyset$, $H \cap A \neq \emptyset$ olur.

(Bağlı olmama ; iki ayrık açığın birleşimi şeklinde olmalı.)

$(G\cap A)\cup(H\cap A) = \underset{(1)}{(G\cup H)}\cap A = A$, $(G\cap A)\cap(H\cap A) = (\underbrace{G\cap H}_{\emptyset})\cap A = \emptyset$.

O halde A bağlantılı değildir.

2 – $X=\{a,b,c,d,e\}$ kümesi üzerine $\tau=\{X,\emptyset,\{a,b,c\},\{c,d,e\},\{c\}\}$ topolojisini koyalım. $A=\{a,d,e\}$ kümesinin bağlantılı olup olmadığını gösteriniz.

Çözüm // Not : Bünyesel topolojiye göre A'nın bağlantılı olup olmaması sözkonusudur.

$\tau_A = \{\emptyset, A, \underbrace{\{a\},\{d,e\}}_{\text{açıklar}}\}$ $\qquad \underbrace{\{a\}}_{\text{açık}}\in\tau_A$, $\underbrace{\{d,e\}}_{\text{açık}}\in\tau_A$

$\underbrace{\{a\}\cap\{d,e\}}_{\text{ayrık}}=\emptyset$ // $\quad \{a\}\cup\{d,e\}=\{a,d,e\}=A$ //

A'da ayrık açık iki küme bulduk. Kesişimleri $\emptyset$, birleşimleri A.

O halde A bağlantılı değildir.

II. yol // A'nın bağlantılı olmadığını gösterebilmek için τ_A topolojisinin A kümesine göre tümleyenini alalım.

$\tau_A' = \{A, \emptyset, \underbrace{\{d,e\},\{a\}}_{\text{kapalı}}\}$ $\qquad \emptyset$ ve X den farklı iki küme (hem açık hem de kapalı) bulduk

Yani τ_A ve τ_A' nün elemanları aynıdır. Fakat τ_A dakiler açık, τ_A' dekiler kapalıdır. X ve $\emptyset$ tan farklı bu kümeler ; A'nın bağlantılı olmadığını gösterir.

A kümesi bağlantılı değildir.

Örnek // S.138/3 – $X=\{a,b,c,d,e\}$ kümesi üzerinde

$T=\{X,\phi,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}\}$

topolojisi veriliyor. $A=\{b,d,e\}$ kümesi üzerine T_A bünyesel topoloji konulduğuna göre, (A,T_A) bağlantılı mıdır?

Çözüm // $\left.\begin{array}{l}\{b,c,d,e\}\cap\{a\}=\phi\\ \{b,c,d,e\}\cup\{a\}=X\end{array}\right\}$ O halde (X,T) bağlantılı değildir.

2. YOL // $T'=\{\phi,X,\{b,c,d,e\},\{a,b,e\},\{b,e\},\{a\}\}$

X ve ϕ dan farklı hem açık, hem de kapalı $\{a\}$ ve $\{b,c,d,e\}$ kümeleri olduğundan (X,T) bağlantılı değildir.

3 – (X,T) bağlantılı bir uzay, T^* da T topolojisinden kaba ise, (X,T^*) topolojik uzayının da bağlantılı olduğunu gösteriniz. $(T^*\subset T)$

Çözüm // Kabul edelim ki (X,T^*) bağlantılı olmasın. X'in T^* topolojisine göre öyle iki ayrık açık (kapalı) kümesi vardır ki, birleşimleri X'e eşittir.

$X=G\cup H$ olacak şekilde $G\in T^*$, $H\in T^*$ vardır ve $G\cap H=\phi$ olur. Veya [$\exists G\in T^*$ ve $H\in T^*$, $G\cap H=\phi$ olup, $X=G\cup H$ olur.]

$T^*\subset T$ olduğundan $G\in T$ ve $H\in T$ olur. Ayrıca $X=G\cup H$, $G\cap H=\phi$ olur. (X,T) bağlantılı idi. Burada ise (X,T)'nun bağlantılı olmasıyla çelişir. Öyle ise (X,T^*) bağlantılıdır.

4 – (X,T) bir topolojik uzay, A ve B'de X'in boş olmayan alt kümeleri olsunlar. Eğer $A\cap\overline{B}=\phi$, $\overline{A}\cap B=\phi$ ise $A\cup B$ kümesinin bağlantılı olmadığını gösteriniz.

Çözüm // $\left.\begin{array}{l}A\subset X\\ B\subset X\end{array}\right\}\Rightarrow A\cup B\subset X$ $A\cup B$ nin bağlantılı olmadığını bünyesel topolojiye göre gösterelim.

$A\cup B=Y$ dersek, bulacağımız açıklar Y'de olmalı. İki ayrık açığın birleşimi $A\cup B$'ye eşit olmalı.

$\overline{B}$ kapalı olduğundan $X-\overline{B}$ açıktır. $G=X-\overline{B}$ olsun.
$\overline{A}$ " " $X-\overline{A}$ " . $H=X-\overline{A}$ olsun. } G, H üst uzayda açıklar.

$\left.\begin{array}{l}(A\cup B)\cap H \\ (A\cup B)\cap G\end{array}\right\}$ AUB deki bünyesel topolojiye göre açıklar. $\left\{\begin{array}{l}A\cap\overline{B}=\phi \Rightarrow A\subset X-\overline{B} \\ \overline{A}\cap B=\phi \Rightarrow B\subset X-\overline{A}\end{array}\right.$

$$(A\cup B)\cap G=(A\cup B)\cap(X-\overline{B})=[A\cap(X-\overline{B})]\cup[\underbrace{B\cap(X-\overline{B})}_{\phi}]=A$$

$$(A\cup B)\cap H=(A\cup B)\cap(X-\overline{A})=[\underbrace{A\cap(X-\overline{A})}_{\phi}]\cup[B\cap(X-\overline{A})]=B$$

$$(A\cup B)\cap G=A \quad , \quad (A\cup B)\cap H=B$$

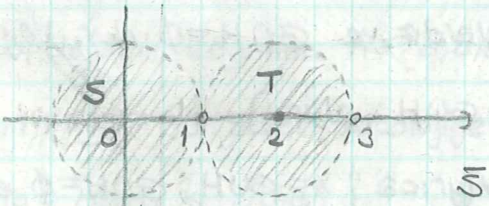
$$[(A\cup B)\cap G]\cap[(A\cup B)\cap H]=A\cap B=\phi \qquad \left\{ A\cap\overline{B}=\phi \Rightarrow B\subset\overline{B}\right.$$

$$[(A\cup B)\cap G]\cup[(A\cup B)\cap H]=A\cup B$$

Arakesitleri ϕ ve birleşimi AUB olan iki açık küme bulduk. O halde AUB bağlantılı değildir.

5 – $\mathbb{R}^2$ üzerine pisagor metriği tarafından oluşturulan topolojiyi koyalım. Eğer, $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}$ ve $T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2+y^2<1\}$ ise $S\cup T$ kümesinin bağlantılı olmadığını gösteriniz.

Çözüm // Çözümü 4. problem yardımıyla yapalım.



$S\neq\phi \quad T\neq\phi$

$S\cap\overline{T}=\phi \quad \overline{S}\cap T=\phi$ olur. Çünkü;

$$\left.\begin{array}{l}\overline{S}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 1\} \\ \overline{T}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2+y^2\leq 1\}\end{array}\right\} \text{dır.}$$

O halde $S\cup T$, $\mathbb{R}^2$ nin bağlantılı olmayan bir alt kümesidir.

6 – $\mathbb{N}$, doğal sayılar kümesini göstermek üzere, bir $U\subset\mathbb{N}$ kümesi, $\mathbb{N}$'nin sonsuz elemanını içeriyorsa, ve tümleyeninin de sonlu elemanı varsa, açık olarak tanımlansın. Bu açıklar ailesi τ olmak üzere,

a- τ ailesinin $\mathbb{N}$ üzerinde bir topoloji olduğunu gösteriniz.

b- $(\mathbb{N},\tau)$ topolojik uzayının bağlantılı olduğunu gösteriniz.

Çözüm // a- (S.104 / 9. Problem – Genel Topoloji) $\tau=\{\phi,\mathbb{N}, U \mid \mathbb{N}-U=\text{sonlu}\}$ Cofinite Topology

b- $U\in\tau$ ise U sonsuz elemanlı ve $\mathbb{N}-U$ sonlu elemanlı. (Bağlantılı olmasaydı;) U kümesi ϕ ve $\mathbb{N}$ den farklı hem açık hem kapalı küme olsun.

U açık ise yani $U\in\tau$ ise $\mathbb{N}-U$ da sonlu eleman vardır.

U kapalı ise, $\mathbb{N}-U$ da sonsuz tane eleman vardır. Bu ise çelişkidir. O halde $(\mathbb{N}, T)$ bağlantılı bir topolojik uzaydır.

Problemler : S:138 //

1 – Not : ⓐ şıkkı Uygulama 3. dekinin aynısı. $(T' \subset T)$

(X, T') bağlantılı olmasın. $X = P \cup Q$, o.ş. $P \cap Q = \phi$, $P, Q \in T'$

$P, Q \in T$ ($T' \subset T$ olduğundan.) olur. Bu ise X'in T topolojisine göre bağlantılı olmadığını gösterir. Oysa soruda (X, T) bağlantılı idi. Bu çelişkidir ve (X, T') bağlantılıdır.

ⓑ örnek// X üzerinde ($X \neq \phi$ olmak üzere) noktasal ve kaba topolojileri alalım. T_n : noktasal topoloji, T_k : kaba topoloji olsun.

$T_k = \{\phi, X\}$ X uzayı, ϕ ve X'den başka açık ve kapalıları olmadığından X uzayı, kaba topoloji (T_k) ye göre bağlantılıdır.

$T_n = \{P(X)\}$ noktasal topolojiye göre uzay bağlantılı değildir. Tek nokta kümesi hem açık hem kapalı olduğundan (ϕ ve X'den başka hem açık hem kapalı tek nokta kümeleri vardır.) bu uzay noktasal topolojiye göre bağlantılı değildir.

$T_k \subset T_n$ (ince topolojiye göre bağlantılı olmaması, kaba topolojiye göre bağlantılı olmamasını gerektirmez.

Yayla bağlantılılık: $\forall a, b \in X$ için a'yı b'ye bağlayan bir f yolunun (yayının) bulunmasıdır.

2 – (Dışardan bir soru): $f : X \to Y$ örten ve sürekli bir fonksiyon olsun. X uzayı yayla bağlantılı bir uzay ise gösteriniz ki Y uzayı da yayla bağlantılıdır. (Yayla bağlantılı bir fonksiyonun sürekli bir fonksiyon altındaki görüntüsü de yayla bağlantılıdır, şeklinde sorulabilir.)

Çözüm// $\forall y_1, y_2 \in Y$ için, bu noktaları birbirine bağlayan bir yayın varlığını göstermeliyiz.

$f(x_1)=y_1$, $f(x_2)=y_2$ o.ş. $x_1,x_2 \in X$ vardır. X uzayı yayla bağlantılı olduğu için bu noktaları birbirine bağlayan bir g yayı vardır.

gof bileşke fonksiyonu da Y'nin yayı olur.

(Tanımdan g sürekli ve örten olmalıdır)

3- $X=\{a,b,c,d,e\}$ kümesi üzerine $T=\{\emptyset, X, \{a,b,c\}, \{c,d,e\}, \{c\}\}$ topolojisi konuluyor.

a) (X,T) bağlantılı uzay mıdır?

b) $A=\{a,d,e\}$ kümesinin bağlantılı olup olmadığını gösteriniz.

Çözüm// a) $\emptyset$ ve X den başka, arakesiti $\emptyset$, birleşimi X olan hem açık hem kapalı kümeler bulunmadığı için X bağlantılıdır.

Veya $T'=\{X,\emptyset,\underbrace{\{d,e\},\{a,b\}}_{\text{kapalılar.}},\{a,b,d,e\}\}$ aynı şekilde bağlantılıdır.

b- $T_A=\{\emptyset, A, \{a\}, \{d,e\}\}$

$\{a\}\in T_A$ $\{d,e\}\in T_A$ $\left.\begin{array}{l}\{a\}\cup\{d,e\}=A \\ \{a\}\cap\{d,e\}=\emptyset\end{array}\right\}$ O halde A kümesi bağlantılı değildir.

Veya T_A kapalılar için aynı şekilde A bağlantılı değildir.

IR sayılar üzerindeki tüm aralıklar bağlantılıdır.

$\left.\begin{array}{l}(a,b) , (-\infty,a) \\ (a,b] , (a,\infty) \\ [a,b) , (-\infty,a) \\ [a,b] , [a,\infty)\end{array}\right\} \mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ $\Big\{$ Reel sayılar kümesi ayrık iki açığın birleşimi birleşimi şeklinde yazılamadığından bağlantılı değildir.

4- T, IR'de alışılmış topolojiyi göstersin. $Q\subset \mathbb{R}$ olmak üzere, Q rasyonel sayılar kümesinin bağlantılı olmadığını gösteriniz.

Çözüm// (T,Q) bünyesel topolojisine göre ayrık açıklar bulmalıyız.

$(-\infty,\sqrt2),(\sqrt2,+\infty)$ $\sqrt2\in\mathbb{R}$, $\sqrt2\notin Q$
IR de açıklardır.

$Q_1=(-\infty,\sqrt2)\cap Q$ bünyesel topolojiye göre (T,Q) da açık.

$Q_2=(\sqrt2,+\infty)\cap Q$ " " " " ".

$Q_1\cap Q_2=\emptyset$ $Q_1\cup Q_2=Q$

O halde ayrık ve açık, birleşimleri $\mathbb{Q}$ olan $\mathbb{Q}_1$ ve $\mathbb{Q}_2$ kümelerini bulduk. $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi bağlantılı değildir.

4.14. Teorem: Yayla bağlantılı her X topolojik uzayı bağlantılı bir uzaydır.

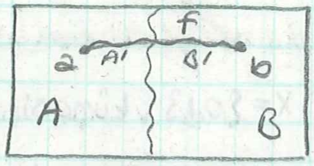
İspat// Eğer X yayla bağlantılı uzaysa,

$\{\forall a,b \in X$ için, $[\alpha,\beta] \xrightarrow{f} X$ $f(\alpha)=a$, $f(\beta)=b$ olacak şekilde bir f sürekli ise.$\}$

Kabul edelim ki X bağlantılı olmasın, (Olmayana ergi)

$\Rightarrow X = A \cup B$ olacak şekilde iki ayrık A ve B açıkları vardır.

Yani $A \cap B = \emptyset$



X

Şimdi $\forall a \in A$ ve $\forall b \in B$ alalım.

Madem ki X yayla bağlantılıdır, o halde bir f sürekli yayı vardır.

$[\alpha,\beta] \xrightarrow{f} X$ f sürekli $f(\alpha)=a$, $f(\beta)=b$

$f[\alpha,\beta]=K$ ile gösterelim. $[\alpha,\beta]$ bir aralıktır. $\Rightarrow [\alpha,\beta]$ bağlantılıdır.
(Çünkü bağlantılı olması için aralık olmalıydı.)

f sürekli $\Rightarrow f[\alpha,\beta]=K$'da bağlantılıdır.

$K \subset X$ $K \cap A = A' \neq \emptyset$ K'daki bünyesel topolojiye göre açıktır.

$K \cap B = B' \neq \emptyset$ " " " " ".

$$A' \cup B' = (K\cap A) \cup (K \cap B) = K \cap \underbrace{(A \cup B)}_{X} = K$$

$$A' \cap B' = (K \cap A) \cap (K \cap B) = K \cap \underbrace{(A \cap B)}_{\emptyset} = \emptyset$$

O halde K bağlantılı değildir. Bu çelişkidir. X bağlantılı uzaydır.

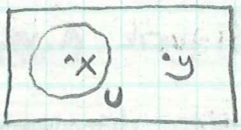
V. BÖLÜM

15.5.95.
P.tesi

AYIRMA AKSİYOMLARI

T_0 – Uzayları

5.1. Tanım: Bir $(X,\mathcal{T})$ topolojik uzayı verilsin. Eğer X uzayının farklı her x,y noktaları için bu noktalardan en az birinin diğerini içermeyen bir komşuluğu varsa bu $(X,\mathcal{T})$ topolojik uzayına bir T_0 uzayı denir.



Örnek 1. // $X=\{0,1\}$ kümesi üzerine basit topolojiyi koyalım. $\mathcal{T}=\{\emptyset,X\}$
Bu topolojinin iki komşuluğu, $\emptyset$ ve X vardır. T_0 olabilmesi için bir noktayı içermeyen birinin bir komşuluğu olmalıdır. Görülüyor ki, X hem 0, hem de 1'i içerir. Bunun için T_0 uzayı değildir.

Örnek 2 // $X=\{0,1\}$, $\mathcal{T}=\{X,\emptyset,\{0\}\}$ topolojisini koyalım. $\{0\}$ komşuluğu 0'ı içerip, 1'i içermiyor. O halde bu uzay T_0 uzayıdır.

5.1. Teorem: $(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay, x,y'de onun farklı iki elemanı olsunlar. Bu zaman x ve y noktalarından bir tanesini içeren her açık kümenin x ve y noktalarının her ikisini de içermesi için gerekli ve yeterli koşul $\overline{\{x\}}=\overline{\{y\}}$ olmasıdır. (ispatı yapılmayacaktır.)

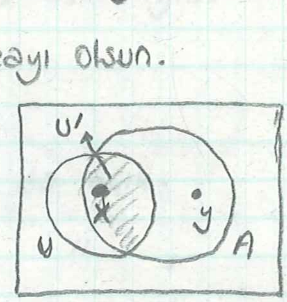
5.1.1. Sonuç: Bir $(X,\mathcal{T})$ topolojik uzayının T_0-uzayı olması için gerekli ve yeterli koşul, X uzayının farklı x,y noktaları için $x\notin\overline{\{y\}}$ veya $y\notin\overline{\{x\}}$ olmasıdır.

5.2. Teorem: Bir T_0-uzayının her alt uzayı yine bir T_0-uzayıdır.

İspat // $(X,\mathcal{T})$ bir T_0 uzayı ve A'da onun bir alt uzayı olsun.

$\forall x,y\in A$ $x\neq y$ alalım.

$A\subset X$ $x,y\in X$ olsun. O halde X bir T_0 uzayı olduğundan;



$(X,\mathcal{T})$

$x \in U$, $y \notin U$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{U}(x)$ komşuluğu vardır.

$U' = U \cap A$ yı gösterelim.

$x \in U'$ olur ve U', A alt uzayındaki bünyesel topolojiye göre x'in bir komşuluğu olur. Diğer taraftan

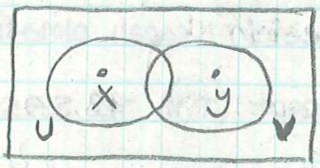
$$y \notin U \supset U' \Rightarrow y \notin U' \text{ olur.}$$

Sonuç olarak, bünyesel topolojiye göre öyle bir U' açığı bulduk ki, $x \in U'$ olduğu halde, $y \notin U'$ oldu.

O halde A bir T_0 uzayıdır.

T_1 - Uzayları

5.2. Tanım: Bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayı verilsin. X topolojik uzayının her x, y farklı noktaları için x noktasının y'yi içermeyen bir komşuluğu ve y noktasının da x noktasını içermeyen bir komşuluğu varsa $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayına bir T_1 uzayı denir.

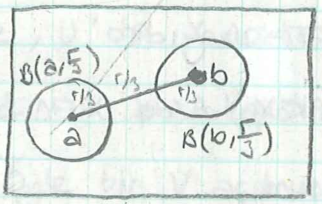


$(X, \mathcal{T})$

$$(\exists U \in \mathcal{U}(x),\ y \notin U \text{ ve } \exists V \in \mathcal{U}(y),\ x \notin V \iff (X, \mathcal{T}) \text{ bir } T_1 \text{ uzayı.})$$

Her T_1 uzayı bir T_0 uzayıdır. Fakat tersi her zaman doğru değildir.

Örnek 1// Her metrik uzay bir T_1 uzayıdır.



(X, d)

$$d(a,b) = r$$

$$a \in B(a, \tfrac{r}{3}) \qquad b \in B(b, \tfrac{r}{3})$$

$$b \notin B(a, \tfrac{r}{3}) \qquad a \notin B(b, \tfrac{r}{3})$$

Örnek 2// $X = \{a, b\}$ kümesi üzerine $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}\}$ topolojisini koyalım.

$a \neq b$, $a \in \{a\}$, $b \notin \{a\}$

Dikkat edilecek olursa, b'yi içerip a'yı içermeyen bir komşuluk yoktur. O halde bu topolojik uzay T_0 uzayı olmasına rağmen T_1 uzayı değildir.

5.3. Teorem : Bir $(X,\mathcal{T})$ topolojik uzayının bir T_1 uzayı olması için gerekli ve yeterli koşul her $x \in X$ için $\{x\} = \overline{\{x\}}$ olmasıdır.

İspat // $\Rightarrow$: Kabul edelim ki $(X,\mathcal{T})$ bir T_1 uzayı olsun. Fakat bir $x \in X$ için $\{x\} \neq \overline{\{x\}}$ olsun. $\{x\} \neq \overline{\{x\}} \Rightarrow \exists z \in \overline{\{x\}} : z \notin \{x\}$, yani $z \neq x$ dir.

$z \in \overline{\{x\}} \Rightarrow$ z nin her komşuluğu x noktasını içerir. Bu ise X uzayının bir T_1 uzayı olmasıyla çelişir. O halde $\forall x \in X$, $\overline{\{x\}} = \{x\}$ yazılır.

$\Leftarrow$: Kabul edelim ki, $\forall x \in X$ için $\{x\} = \overline{\{x\}}$ olsun. $\forall y, z \in X$ olsun. $y \neq z$ olsun. İspatlamalıyız ki, uzayımız T_1 uzayıdır.

y'nin her komşuluğu z'yi içerseydi $y \in \overline{\{z\}} = \{z\} \Rightarrow y = z$ olurdu ki bu bir çelişki olur. O halde y'nin z'yi içermeyen en az bir komşuluğu vardır. Benzer şekilde, y için de aynı şeyler söylenebilir.

O halde X bir T_1 uzayıdır.

5.3.1. Sonuç : $(X,\mathcal{T})$ topolojik uzayının bir T_1 uzayı olması için gerekli ve yeterli koşul, X uzayının her tek nokta kümesinin kapalı olmasıdır.

18.5.95 / Perşembe

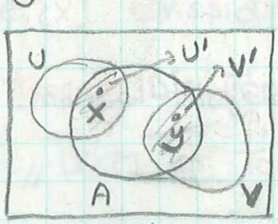
$$\left\{ \begin{array}{l} (X,\mathcal{T}),\ \forall x,y \in X \quad x \neq y ; \\ \exists U \in \mathcal{U}(x) ; y \notin U \ ;\ \exists V \in \mathcal{U}(y), x \notin V \Rightarrow T_1 \text{ topolojik uzayıdır.} \end{array} \right\}$$

Örnek // Her metrik uzay bir T_1 uzayıdır. (5.3.1) Sonuç'tan.

Her T_1 uzayı bir T_0 uzayıdır. Fakat tersi her zaman doğru değildir.

5.4. Teorem : Bir T_1-uzayının her alt uzayı yine bir T_1-uzayıdır.

İspat // Kabul edelim ki, $(X,\mathcal{T})$ bir T_1 uzayı ve $(A \subset X)$ A'da X in bir alt uzayı olsun. $\forall x, y \in A$ verilsin. $x \neq y$ olsun.



$x, y \in A \subset X \Rightarrow x, y \in X$ olur.

Halbuki X bir T_1 uzayı idi.

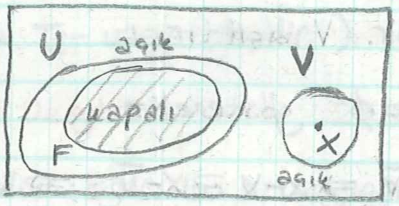
$\Rightarrow \exists U \in \mathcal{U}(x) : y \notin U \quad \exists V \in \mathcal{U}(y) : x \notin V$ olur.

$U' = U \cap A$, $V' = V \cap A \Rightarrow U'$, x'in ve V'de y'nin A daki bünyesel topolojiye göre komşuluklarıdır.

$$\left.\begin{array}{l} y \notin U \supset U' \Rightarrow y \notin U' \\ x \notin V \supset V' \Rightarrow x \notin V' \end{array}\right\} \Rightarrow A \text{ alt uzayı da bir } T_1 \text{ uzayıdır.}$$

Düzenli (Regüler) Uzaylar ve T_3-Uzayları

5.3. Tanım: Bir (X,T) topolojik uzayı verilmiş olsun. Eğer X uzayının herhangi bir F kapalı alt kümesi ve $x \notin F$ koşulunu sağlayan bir $x \in X$ noktası verildiğinde $F \subset U$, $x \in V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde U ve V açık alt kümeleri varsa bu (X,T) topolojik uzayına düzenli uzay denir.



$U \cap V = \emptyset$

$F \subset U$

Örnek // $X = \{a,b,c\}$ kümesi üzerine $T = \{\emptyset, X, \{b,c\}, \{a\}\}$ topolojisini koyalım.
(açıklar.)

$T' = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b,c\}\}$ (kapalılar.) ; $a \notin \{b,c\}$ $\{a\} \cap \{b,c\} = \emptyset$

$b \notin \{a\}$ $\{b,c\} \cap \{a\} = \emptyset$

$c \notin \{a\}$ $\{b,c\} \cap \{a\} = \emptyset$

5.5. Teorem: Bir (X,T) topolojik uzayının düzenli uzay olması için gerekli ve yeterli koşul, her $x \in X$ ve x noktasının her U açık komşuluğu için $\overline{V} \subset U$ olacak şekilde x'in bir V açık komşuluğunun bulunmasıdır.

İspat // $\Rightarrow$: Kabul edelim ki, (X,T) bir düzenli uzay ve $x \in X$ olmak üzere, U'da x noktasının herhangi bir açık komşuluğu olsun.

U açık $\Rightarrow$ $X-U$ kapalıdır. $x \notin X-U$ olur. ($x \in U$ olduğundan)

Öyle bir V açık kümesi ve W açık kümesi vardır ki, $V \cap W = \emptyset$, $x \in V$, $X-U \subset W$ olur.

$X-U \subset W \Rightarrow X-(X-U) \supset X-W \Rightarrow X-W \subset U$ ... ①

$V \cap W = \emptyset \Rightarrow V \subset X-W$ .... ②

$\underset{\text{açık}}{V} \subset \underset{\text{kapalı}}{X-W} \subset \underset{\text{açık.}}{U}$

$V \subset \overline{V} \subset X-W \subset U \Rightarrow V \subset \overline{V} \subset U$ olur. //

$\Leftarrow$: $\forall x \in X$ için x noktasının her U açık komşuluğu için $\overline{V} \subset U$ olacak şekilde, x'in bir V açık komşuluğunun bulunduğunu kabul edelim.

(X,T) 'nun düzenli uzay olduğunu ispatlayacağız.

$\forall F \subset X$ kapalı ve $\forall x \in X$ alalım, öyle ki $x \notin F$ olsun.

F kapalı $\Rightarrow$ $X-F$ açıktır. $x \in X-F$, $X-F$, x'in bir açık komşuluğudur.

Kabulden dolayı $\overline{V} \subset X-F$ olacak şekilde x noktasının bir V açık komşuluğu vardır. $\underbrace{\overline{V}}_{kapalı} \subset X-F \Rightarrow F \subset \underbrace{X-\overline{V}}_{açık}$ olur. (F kapalısını kapsayan açık küme bulduk)

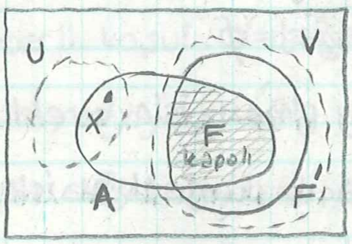
$x \in V$ dir. V açıktır.

$V \cap (X-\overline{V}) = \emptyset$ gösterelim.

$V \subset \overline{V} \Rightarrow X-V \supset X-\overline{V} \Rightarrow V \cap (X-V) = \emptyset \Rightarrow V \cap (X-\overline{V}) = \emptyset$ olur. //

5.6. Teorem: Bir düzenli uzayın her alt uzayı yine bir düzenli uzaydır.

ispat// kabul edelim ki (X,T) bir düzenli uzay A da onun bir alt uzayı olsun. $\forall x \in A$ ve $x \notin F$ olsun.



F, A alt uzayında kapalı (A'daki bünyesel topolojiye göre kapalıdır.)

$\Rightarrow F = F' \cap A$ olacak şekilde, X'de kapalı bir F' alt kümesi vardır. ve $x \notin F'$ olur. Bunu gösterelim.

Eğer $x \in F'$ olsaydı, $x \in A$, $x \in A \cap F' = F$ olurdu. O halde $x \notin F'$

bu çelişkidir.

$x \in U$ ve $F' \subset V$ olacak şekilde X'de U ve V açık alt kümeleri vardır.

$U' = U \cap A$, $V' = V \cap A$, $U' \cap V' = (U \cap A) \cap (V \cap A) = \underbrace{(U \cap V)}_{\emptyset} \cap A = \emptyset$

U' ve V', A'da açıktırlar. $x \in U'$ ve

$F' \subset V$, $F = \underbrace{A \cap F}_{F} \subset \underbrace{V \cap A}_{V'} \Rightarrow F \subset V'$ olur.

O halde A alt uzayı da düzenli uzaydır.

5.7. Teorem: Her (X,d) metrik uzayı bir düzenli uzaydır.

ispat// $\forall x \in X$ noktasını alalım. Ve U 'da x'in herhangi bir açık komşuluğu olsun.

$B(x,\rho) \subset U$ olacak şekilde bir $B(x,\rho)$ açık yuvarı vardır.

$q>0$ sayısını $q<\rho$ olacak şekilde seçelim. $B(x,q) \subset B(x,\rho) \subset U$

$\overline{B(x,q)} = \{ y \mid d(x,y) \leq q \} \subset B(x,\rho) \subset U$ yazılır. 5.5 Teoremden,

(X,d) metrik uzayı bir düzenli uzay olur.

5.4. Tanım: Eğer bir (X,T) topolojik uzayı hem T_1, hem de düzenli bir uzaysa buna bir T_3-uzayı denir.

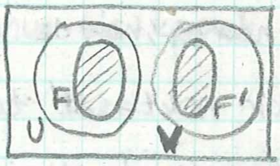
Bir T_3 uzayının her alt uzayı yine bir T_3-uzayıdır.

(Bazı kitaplarda düzenli uzay yerine T_3-uzayı denilir.)

Normal Uzaylar ve T_4-Uzayları

22.5.95 / P.tesi

5.5. Tanım: Bir (X,T) topolojik uzayı verilsin. Eğer bu X uzayının herhangi verilen F ve F' kapalı ve ayrık alt kümeleri için $F \subset U$ ve $F' \subset V$ koşulunu sağlayan ayrık ve açık U ve V alt kümeleri varsa, bu (X,T) topolojik uzayına <u>normal uzay</u> denir.



U, V açık

$U \cap V = \emptyset$

5.8. Teorem: Bir (X,T) topolojik uzayının bir normal uzay olması için gerekli ve yeterli koşul, X'in $F \subset U$ koşulunu sağlayan herhangi bir U açık ve F kapalı alt kümeleri verildiğinde $F \subset V \subset \overline{V} \subset U$ koşulunu sağlayan bir V açık alt kümesinin bulunmasıdır.

İspat // $\Rightarrow$: Kabul edelim ki (X,T) bir normal uzay, F X'de kapalı bir alt küme ve U'da $F \subset U$ koşulunu sağlayan verilen bir açık alt küme olsun. U açık $\Rightarrow$ $X-U$ kapalıdır.

$(X-U) \cap F = \emptyset$ $\quad$ $X-U \subset W$ ve $F \subset V$ ve $V \cap W = \emptyset$ olacak şekilde V ve W açık alt kümeleri vardır.

$X-U$ kapalı, $X-U \subset W$, $W \cap V = \emptyset \Rightarrow (X-U) \cap \overline{V} = \emptyset$ olur.

$\Rightarrow$: $\overline{V} \subset X-(X-U) = U \Rightarrow \overline{V} \subset U$, $V \subset \overline{V}$, $F \subset V$

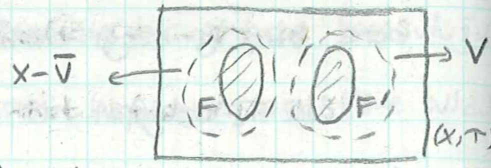
$\Rightarrow F \subset V \subset \overline{V} \subset U$ olur. //

$\Leftarrow$: Kabul edelim ki, X'in $F \subset U$ koşulunu sağlayan F kapalı, U açık alt kümesi olsun. F ve F', X'in iki kapalı alt kümesi olsun. $(F \cap F' = \emptyset)$

Bunların herbirinin içinde birer açık bulmalıyız ki, arakesiti $\emptyset$ olsun.

$$\underset{\text{kapalı}}{F'} \cap F = \emptyset \Rightarrow \underset{\text{kapalı}}{F'} \subset \underset{\text{açık}}{X-F}$$

Kabulden dolayı, $F' \subset V \subset \overline{V} \subset X-F$ olacak şekilde V açık alt kümesi vardır.



$$\underset{\text{kapalı}}{\overline{V}} \subset X-F \Rightarrow \underset{\text{açık}}{X-\overline{V}} \supset X-(X-F) = F$$

$\left.\begin{array}{l} F' \subset V \\ F \subset X-\overline{V} \end{array}\right\}$ $V \cap (X-\overline{V}) = \emptyset$ $\quad$ $\begin{array}{l} V \cap (X-V) = \emptyset \\ V \subset \overline{V} \\ X-V \supset X-\overline{V} \end{array}$ $\Rightarrow (X-\overline{V}) \cap V = \emptyset$ //

5.6. Tanım: Bir (X,T) topolojik uzayı hem T_1-uzayı hem de bir normal uzaysa buna bir T_4-uzayı denir.

$\{T_4 =$ hem T_1, hem de normal , $T_3 =$ hem T_1, hem de düzenli$\}$

2. Örnek // (X,T) bir noktasal topolojik uzay olsun. Bu uzay bir normal uzaydır. Çünkü, $\forall x,y \in X$, $\{x\},\{y\}$ hem açık hem de kapalıdır. $x \neq y$

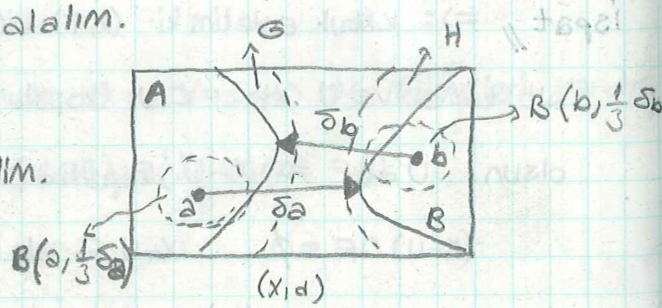
$\forall A \subset X$ hem açık hem de kapalıdır. Noktasal topolojik uzay ise T_1 uzayı idi. Aynı zamanda T_4 uzayıdır.

5.9. Teorem: Her metrik uzay bir normal uzaydır.

İspat // (X,d) bir metrik uzay, A ve B'de X'in kapalı ve ayrık iki alt kümesi olsun. $\forall a \in A$ ve $b \in B$ alalım.

$d(a,B) = \inf\limits_{x \in B} d(a,x)$ idi

$d(a,B) = \delta_a$, $d(b,A) = \delta_b$ diyelim.



a'lar A'yı, b'ler de B'yi tarasınlar.

$G = \bigcup\limits_{a \in A} B(a, \frac{1}{3}\delta_a)$ ve $H = \bigcup\limits_{b \in B} B(b, \frac{1}{3}\delta_b)$

$A \subset G$ $\qquad$ $B \subset H$

G ve H'lar açık kümelerdir. İddia ediyoruz ki $G \cap H = \emptyset$ tur.

Kabul edelim ki, bu kesişim boştan farklı olsun.

$\exists p \in G \cap H$ vardır ki, $p \in G$ ve $p \in H$ olur.

$p \in B(a_0, \frac{1}{3}\delta_{a_0})$ olacak şekilde bir $a_0 \in A$ vardır.

$p \in B(b_0, \frac{1}{3}\delta_{b_0})$ olacak şekilde bir $b_0 \in B$ vardır.

$$\left.\begin{array}{l} p \in B(a_0, \frac{1}{3}\delta_{a_0}) \Rightarrow d(a_0, p) < \frac{1}{3}\delta_{a_0} \leq \frac{1}{3}\varepsilon \\ p \in B(b_0, \frac{1}{3}\delta_{b_0}) \Rightarrow d(b_0, p) < \frac{1}{3}\delta_{b_0} \leq \frac{1}{3}\varepsilon \end{array}\right\} d(a_0, b_0) = \varepsilon \text{ dersek,}$$

$$\varepsilon = d(a_0, b_0) \leq d(a_0, p) + d(p, b_0) < \frac{1}{3}\delta_{a_0} + \frac{1}{3}\delta_{b_0} \leq \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon = \frac{2}{3}\varepsilon$$

yani; $\underbrace{\overline{\varepsilon < \frac{2}{3}\varepsilon}}_{\text{olamaz.}}$ olur. Bu ise çelişkidir. yani $G \cap H = \emptyset$ olur.

O halde (X, d) metrik uzayı bir normal uzaydır.

5.9.1. Sonuç : Her metrik uzay bir T_4- uzayıdır.

(Tüm uzaylar, metrik uzayın özelliklerini sağlarlar.)

5.10. Teorem : $(X, \mathcal{T})$ bir normal uzay, Y'de onun bir kapalı alt uzayı olsun.

Bu taktirde Y'de bir normal uzaydır.

İspat// Y, X'de kapalı olduğundan bir $F \subset Y$ nin Y'de kapalı $\Leftrightarrow$

F'nin X'de kapalı olmasıdır. $\Rightarrow$ F ve F', X'de kapalı ve ayrıktırlar.

X bir normal uzaydır. O halde $F \subset U$, $F' \subset V$, $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde

X'de U ve V açık alt kümeleri vardır.

$U' = U \cap Y$, $V' = V \cap Y$ diyelim. V' ve U' Y alt uzayında açıktırlar.

$$\left.\begin{array}{l} F \subset U \\ F \subset Y \end{array}\right\} F \subset U \cap Y = U' \qquad \left.\begin{array}{l} F' \subset V \\ F' \subset Y \end{array}\right\} F' \subset V \cap Y = V'$$

$$U' \cap V' = (U \cap Y) \cap (V \cap Y) = \underbrace{(U \cap V)}_{\emptyset} \cap Y = \emptyset \text{ olur.}$$

O halde Y alt uzayı da bir normal uzaydır.

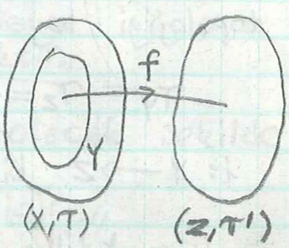
5.11. Sonuç : Bir T_4- uzayının kapalı her alt uzayı da T_4- uzayıdır.

Fonksiyonların Genişletilmesi

$(X, \mathcal{T})$, $(Z, \mathcal{T}')$ gibi iki topolojik uzay ile

X'in bir Y alt uzayı verilsin. $f: X \xrightarrow{\text{sürekli}} Z$ verilsin.

$F: X \to Z$ sürekli genişletilmesi var mıdır?



yani, $F/Y = f$ olacak şekilde sürekli $F:(X,\tau) \to (Z,\tau')$ var mıdır?

$\forall y \in Y$ için $F(x) = f(x)$ $\Rightarrow$ genişletilmiş idi.

Cevabımız; evet, hayır ya da belirsiz olabilir. Bununla ilgili üç örnek verelim.

1. Örnek // (X,τ) topolojik uzay, $Y \subset X$, $i: Y \to X$, $x \to i(x) = x$ birim fonksiyon olsun.

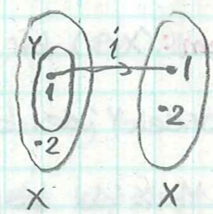
i süreklidir çünkü, her $U \in \tau$ için $i^{-1}(U) = U \cap Y \in \tau_Y$ açıktır.

$I: X \xrightarrow{\text{örten}} X$, $x \to I(x) = x$ birim fonksiyon olsun. I süreklidir. $I/Y = i$ olur.

I fonksiyonu, i fonksiyonunun sürekli bir genişletilmesidir.

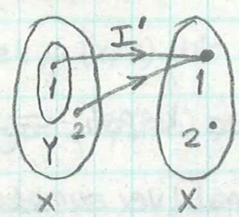
2. Örnek // Bir fonksiyonun birden fazla sürekli genişletilmesinin olabileceği şeklinde örnektir.

$X = \{1,2\}$ ve $Y = \{1\}$ olsun. $i: Y \to X$ birim fonksiyonunu alalım.



$i(1) = 1$

$I': X \to X$ tanımlayalım.



$I'(1) = 1$
$I'(2) = 1$

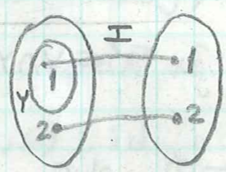
$I'/Y = i$

yani I', i'nin bir genişletilmesidir. I' süreklidir. Gösterelim.

$\tau = \{X, \emptyset, \{1\}, \{2\}\}$

$1 \in \{1\}$ $\quad f^{-1}(\{1\}) = X \in \tau$ $\qquad 1 \in X$ $\quad f^{-1}(X) = X \in \tau$ $\qquad$ i süreklidir.

$I: X \to X$
$x \to I(x) = x$



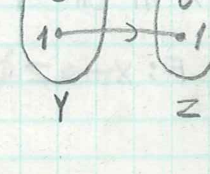
I süreklidir.

$I^{-1}(\{1\}) = \{1\} \in \tau$ $\qquad I^{-1}(\{2\}) = \{2\} \in \tau$ $\qquad I^{-1}(X) = X \in \tau$ $\qquad I^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau$

O halde bir fonksiyonun birden fazla sürekli genişletilmesi olabilir.

3. Örnek // $X = [0,1]$ üzerine mutlak değer metriği tarafından oluşturulan topolojiyi koyalım. $(d(x,y) = |x-y|)$ $\quad Y = Z = \{0,1\}$ olsun. (Noktasal topoloji.)

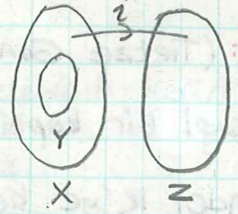
$\tau_Y = \tau_Z = \{\{0\}, \{1\}, \cancel{X}, \emptyset\} = \{\{0\}, \{1\}, Z, \emptyset\}$



$i: Y \to Z$ birim fonksiyon olsun. $\quad i(0) = 0 \quad i(1) = 1$

(Genişletilme olmamaya örnek.)

İddia ediyoruz ki $X \xrightarrow{i} Z$ giden hiçbir sürekli genişletilmesi yoktur.



Kabul edelim ki $F: X \longrightarrow Z$ i'nin sürekli bir F genişletilmesi bulunsun.

$0 \neq 1 \Rightarrow F^{-1}(\{0\})$ ve $F^{-1}(\{1\})$ X'deki mutlak değer metriğine göre açıktırlar.

bağlantılıdır

$F^{-1}(\{1\}) \cup F^{-1}(\{0\}) = X$ olur. Ayrıca

$F^{-1}(\{1\}) \cap F^{-1}(\{0\}) = \emptyset$ olur. Eğer arakesit boştan farklı olsaydı $\exists x \in F^{-1}(\{0\}) \cap F^{-1}(\{1\})$ bulunurdu.

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow F(x) \in \{0\} \Rightarrow F(x)=0 \\ F(x) \in \{1\} \Rightarrow F(x)=1 \end{array}\right\}$$ olamaz. O halde arakesit boş olur.

$[0,1]$ kapalı ve bağlantılı olduğundan bu bir çelişki olur. O halde böyle bir F sürekli genişletilmesi bulunamaz.

5.12. Teorem: (Urysohn Lemması). Bir $(X,\mathcal{T})$ topolojik uzayının normal uzay olması için gerekli ve yeterli koşul, bu uzayda verilen herhangi boş olmayan ayrık ve kapalı F_1 ve F_2 alt kümeleri için $f[F_1]=0$ ve $f[F_2]=1$ olacak şekilde $f: X \rightarrow [0,1]$ sürekli fonksiyonu bulunmasıdır. (Burada $[0,1]$ üzerindeki topoloji, mutlak değer metriği tarafından oluşturulan topolojidir.)

5.13. Sonuç: $(X,\mathcal{T})$ birden fazla nokta içeren bir T_4 uzayı olsun. Bu taktirde sabit olmayan $f: X \rightarrow [0,1]$ sürekli fonksiyonu vardır.

İspat// X bir T_4-uzayı $\Rightarrow$ X bir T_1 uzayı, X bir normal uzaydır.

X bir T_1 uzayı olduğundan her tek nokta kümesi kapalıdır.

$\forall x,y \in X$ alırsak $x \neq y$, $\{x\}$ ve $\{y\}$ kümeleri kapalıdır.

X normal uzay, $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$ olur. Bunlar ayrıktır.

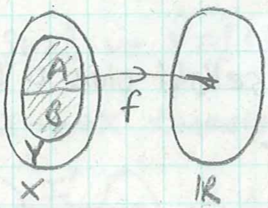
Urysohn Lemması'ndan, $f(\{x\})=0$ ve $f(\{y\})=1$ olacak şekilde bir $f: X \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu vardır. f sabit değildir. //

5.14. Teorem: (Tietze Genişletme Teoremi): X bir normal uzay, Y'de onun herhangi bir kapalı alt kümesi olsun. Yine kabul edelim ki f'de Y kümesinden $\mathbb{R}$'ye herhangi bir sürekli fonksiyon olsun. Bu taktirde f fonksiyonunun X kümesinden $\mathbb{R}$'ye giden bir $F: X \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli genişletilmesi vardır.

Açıklama: X bir normal uzay, A ve B'de onun iki kapalı alt kümesi olsunlar. $Y = A \cup B$ diyelim ve $f: Y \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu her $a \in A$ için $f(a) = 0$ ve her $b \in B$ için $f(b) = 1$ biçiminde tanımlayalım.

f süreklidir. 5.14. Teoremden f fonksiyonu X kümesine genişletilebilir.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in A \\ 1, & x \in B \end{cases} \text{ ise}$$

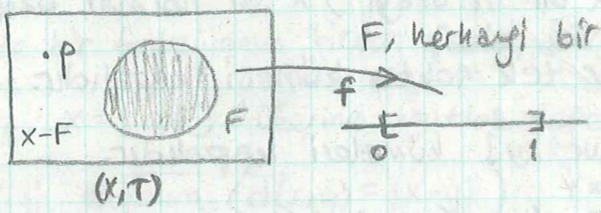


$Y \subset X$

Sonuç: (X, T) bir normal uzay ve $A \subset X$ kapalı bir alt küme olsun. Eğer $f: A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sürekli bir fonksiyon ise bu taktirde f fonksiyonunun X kümesine bir sürekli F genişletilmesi vardır.

Büsbütün Düzenli Uzaylar

5.7. Tanım: (X, T) bir topolojik uzay, $F \subset X$ kapalı bir alt küme ve $P \in X - F$ olsun. Eğer $f(P) = 0$ ve $f[F] = 1$ olacak şekilde bir sürekli $f: X \longrightarrow [0, 1]$ fonksiyonu varsa bu (X, T) topolojik uzayına büsbütün düzenli uzaylar denir.



1- (X,τ) bir T_1 uzayı olsun. X kümesinin sonlu elemanlı her A alt kümesinin yığılma noktasının olmadığını gösteriniz.

Çözüm // $(\exists U\in \mathcal{U}(a)\ b\notin U$ ve $\exists V\in\mathcal{U}(b)\ a\notin V) \Leftrightarrow ((X,\tau)\ T_1$ uzayı$)$

$\left\{ \begin{array}{l} p\in X \text{ noktası } A\subset X\text{'in yığılma noktasıdır} \Leftrightarrow \forall U\in\mathcal{U}(p),\ (U-\{p\})\cap A\neq\emptyset \\ A=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}\subset X \text{ sonlu alt küme} \end{array} \right\}$

T_1 uzayında her tek nokta kümesi kapalıdır. O halde A kümesi de kapalıdır. ($\Rightarrow X-A$ açıktır.) A'dan bir elemanı atalım.

$B=\{a_2,a_3,\dots,a_n\}$ kümesini alalım. $B\subset X$ ve B kapalıdır.

$\Rightarrow X-B$ açıktır. (X, T_1 uzayı ve T_1 uzayında tek nokta kümeleri kapalı ve sonlu sayıda kapalının birleşimi de kapalıdır.)

$a_1\notin B \Rightarrow a_1\in X-B$ O halde $X-B$ kümesi a_1 noktasının bir açık komşuluğudur. Aynı zamanda her açık komşuluk bir komşuluk olduğundan $X-B\in\mathcal{U}(a_1)$ dir.

$(X-B)\cap A=\{a_1\}$ olur. Bu ise a_1 noktasının A kümesinin bir yığılma noktası olmadığını gösterir. Bu A'nın her noktası için yapılacağından A sonlu kümesinin yığılma noktası yoktur.

2- X sonlu elemanlı bir küme olmak üzere (X,τ) topolojik uzayı veriliyor. Eğer (X,τ) bir T_1 uzayı ise bir noktasal topolojik uzay olduğunu gösteriniz.

Çözüm // (X,τ) nun noktasal topolojik uzay olduğunu göstermek için her tek nokta kümesinin hem açık hem de kapalı olduğunu göstermeliyiz.

$X=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}=\{a_1\}\cup\{a_2\}\cup\dots\cup\{a_n\}$ $\{X$ sonlu elemanlı$\}$

şeklinde yazılabilir. (X,τ) T_1 uzayı olduğundan her tek nokta kümesi kapalı ve sonlu sayıdaki kapalının birleşimi de kapalıdır. O halde X kümesi kapalıdır. (Yalnız T_1 uzayında kapalı olur.)

$\forall a\in X$ alalım. Burada a, X kümesinin elemanlarından herhangi bir tanesini gösteriyor.

$\{a\} \subset X \Rightarrow \{a\}$ tek nokta kümesi; X, T_1 uzayı olduğundan dolayı kapalı olur.

$X-\{a\}$ sonludur ve X kapalı olduğundan $X-\{a\}$ kapalıdır.

$\underbrace{X-\underbrace{(X-\{a\})}_{kapalı}}_{açık} = \underbrace{\{a\}}_{açık}$ $\cdot \{a\}$ tek nokta kümesi açık olur.

(Bu özel bir örnektir.)

$\{a\}$ hem açık, hem kapalı olduğundan, bunu X'in her tek noktası için yapabiliriz. Dolayısıyla (X,T) noktasal topolojidir.

3- $X=\{0,1\}$ kümesi üzerine konan $T=\{X, \phi, \{0\}\}$ topolojisine göre (X,T) topolojik uzayı bir düzenli uzay mıdır? bir T_3 uzayı mıdır? Gösteriniz.

Çözüm// $((X,T)$ düzenli uzay$) \Leftrightarrow (\forall F \subset X$ kapalı alt küme $\forall x \notin F$ için $U \in \mathcal{U}(x)$ ve $F \subset V$ açık olan kümeler için $U \cap V = \phi$ olacak $)$

$((X,T)$ T_3 uzayı$) \Leftrightarrow$ (hem T_1 uzayı, hem de düzenli uzay.)

{düzenli uzay değilse T_3 uzayı değildir.}

$T' = \{X, \phi, \{1\}\}$ kapalılar.

$F=\{1\}$ tek nokta kümesini alalım. $0 \notin \{1\}$, $0 \in \{0\}$ bir açık komşuluğudur. (sıfır tek nokta kümesi sıfırın)

$\{1\} \subset X$ açığı olur.

$\{0\} \cap X = \{0\} \cap \{0,1\} = \{0\} \neq \phi$ olduğundan düzenli uzay değildir.

O halde T_3 uzayı da değildir.

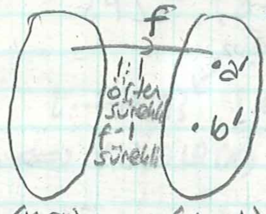
4- (X,T), (Y,T') topolojik uzayına homeomorfik bir T_0 uzayı ise (Y,T') uzayının da bir T_0 uzayı olduğunu gösteriniz.

Çözüm// $f: (X,T) \longrightarrow (Y,T')$ (1:1, örten, sürekli ve tersi vardır) bir homeomorfizm vardır.

(Bir T_0 uzayının homeomorfizm altındaki görüntüsünün de T_0 uzayı olduğunu gösteriniz şeklinde sorulabilirdi.)

(Y,T') nün T_0 uzayı olduğunu gösterelim.

$\forall a', b' \in Y$, $a' \neq b'$ noktalarını alalım.



f örten

f örten olduğundan $f^{-1}(a') = a$ ve $f^{-1}(b') = b$ olacak şekilde $a, b \in X$ vardır

$f : (X,T) \to (Y,T')$
$x \to f(x) = x'$ $\quad x' \neq y'$
$y \to f(y) = y'$

ve f, 1:1 olduğundan $a \neq b$ dir.

(X,T) T_0 uzayı olduğundan, öyle bir $\overset{\text{açık.}}{U} \in \mathcal{U}(a)$ vardır ki $b \notin U$ olur. ($\to a \in U$)

$f(U) = (f^{-1}(U))^{-1} = (f^{-1})^{-1}(U)$ açıktır. {f ve f^{-1} sürekli olduğundan}

$f(a) = a' \in f(U)$ dur. $\Rightarrow f(U) \in \mathcal{U}(a')$

(homeomorfizm altında açık kümenin görüntüsü de daima açıktır. Ancak yalnızca sürekli fonksiyon için bu doğru değildir / olmayabilir.)

$b \notin U$ olduğundan $f(b) = b' \notin \mathcal{U}(a')$ olur.

O halde (Y,T') de bir T_0 uzayıdır.

5- (X,T) bir T_1 uzayı ve $A \subset X$ olsun. Aşağıdaki koşullar denktir.

i- $p \in X$ noktası A kümesinin bir yığılma noktasıdır.

ii- p noktasını içeren <u>her</u> açık küme, A'nın <u>sonsuz</u> noktasını içerir.

Çözüm// $ii \Rightarrow i$ (sayfa 112. 3.11. Tanım)

yığılma noktasının tanımı gereğince elde edilir. (yığılma nok. tanımıdır.)

$(\forall U \in \mathcal{U}(p)\ U - \{p\} \cap A \neq \emptyset \iff p$ yığılma noktası$)$

$i \Rightarrow ii$ durumunu ispatlamak için $ii' \Rightarrow i''$ durumunu gösterelim.

P noktasını içeren <u>bazı</u> açık kümeler A'nın <u>sonlu</u> noktasını içersin.

Yani p noktasını içeren <u>bir G açık</u> kümesinin, A'nın p noktasından farklı sonlu sayıda eleman içerdiğini kabul edelim. Buradan

$\underbrace{(G - \{p\}) \cap A}_{\text{sonlu}} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = \{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \ldots \cup \{a_n\}$

olur. $B = (G - \{p\}) \cap A$ diyelim.

T_1 uzayında her tek nokta kümesi kapalı olduğundan B kümesi kapalı kümedir. $X - B$ açıktır.

$H = G \cap \underbrace{(X-B)}_{\text{sonsuz}} = \{p\}$ $\quad A \cap H = \{p\}$ ve

$\{p, a_1, \dots, a_n\}$ $\quad \{p, a_n, \dots\}$

H açıktır. Böylece H, p noktasının komşuluğudur.

Yani p, A'nın yığılma noktası değildir.

O halde ispat tamamlanmış olur.

6- $\tau = \{\phi, X, A \mid X-A = \text{sonlu}\}$ sonlu tümleyenler topolojisini koyalım.

(X, τ) nun T_1-uzayı olduğunu gösteriniz.

Çözüm// $\forall a \neq b \in X$ noktası alalım. a'nın b'yi içermeyen bir komşuluğunu ve b'nin a'yı içermeyen bir komşuluğunu bulmalıyız.

Not: $a \in \{a\} \rightarrow$ açık olup olmadığını bilmediğimiz için $\{a\}$ kümesi a noktasının komşuluğu olmayabilir. Yalnızca noktasal topolojide $\{a\}$ tek nokta kümesi hem açık hem de kapalı olduğundan $a \in \{a\}$ dır. Yani $\{a\}$ kümesi a'nın açık komşuluğudur.

$X - \{a\}$ kümesini düşünelim.

$X - (X - \{a\}) = \{a\}$ sonludur. O halde $X - \{a\}$ açıktır.

$X - \{a\} = U$ diyelim. $a \notin U$ $b \in U$ olur. U b'nin (açık) komşuluğudur.

$U \in \mathcal{U}(b)$ dir ve $a \notin U$ dur.

Şimdi a'nın öyle bir komşuluğunu bulalım ki b'yi içermesin.

$X - \{b\}$ kümesini düşünelim.

$X - (X - \{b\}) = \{b\}$ sonludur. O halde $X - \{b\}$ açıktır.

$X - \{b\} = V$ diyelim. V açıktır. ve $a \in V$ ama $b \notin V$ dir.

O halde (X, τ) bir T_1 uzayıdır.

Problemler : (S.156)

1- (X, τ) nun T_0 uzayı olması için $\Leftrightarrow$ X'in her farklı tek nokta kümelerinin kapanışlarının farklı olmasıdır.

((X, τ), T_0 uzayı $\Leftrightarrow$ $\forall \{x\} \neq \{y\}$ için $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$ olmalı.)

Çözüm// (X, τ), T_0 uzayı $\Leftrightarrow$ $\forall x \neq y \in X$ için $\underline{\exists U \in \mathcal{U}(x)}$: $y \notin U$ dur.

(veya $\exists V \in \mathcal{U}(y)$: $x \notin V$ dir.)

$x \in U$ ve U'nun açık olmasıdır.

$\{x\} \cap U \neq \phi \quad \{y\} \cap U = \phi$ olur.

Not: (X,τ) t.u. $A \subset X$ olsun. $\forall x \in \overline{A}$ olması için $\Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}(x)$: $U \cap A \neq 0$ olmasıdır.

$\{x\} \cap U \neq \phi \quad \{y\} \cap U = \phi \Rightarrow x \notin \overline{\{y\}}$

Not'taki teoremde A kümesi yerine $\{y\}$ kümesini alırsak x'in komşuluğu olan U ile arakesiti ϕ olduğundan $x \notin \overline{\{y\}}$ $x \in \overline{\{x\}}$ dır.

Tersine $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$ olsun. T_0-uzayı mıdır?

$\exists z \in \overline{\{x\}}$, $z \notin \overline{\{y\}}$ dır.

$\exists U \in \mathcal{U}(z)$, $U \cap \{x\} \neq \phi \quad U \cap \{y\} = \phi$

$\quad x \in U \qquad y \notin U$

O halde (X,τ) bir T_0-uzayıdır.

5.16. Teorem: Her büsbütün düzenli (X,τ) topolojik uzayı bir düzenli uzaydır.

İspat// F, X'in herhangi bir kapalı alt kümesi ve $\forall p \notin F$ olsun.

$p \notin F \Rightarrow p \in X - F$ olur.

Öyle bir $f: X \longrightarrow [0,1]$ sürekli fonksiyonu vardır ki;

$f(p) = 0 \quad f[F] = 1$ olur.

$[0,1] \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ bir T_2 (Hausdorff) uzayıdır. Bu nedenle;

O halde, 0'ın bir U ve 1'in de bir V açık komşuluğu vardır ki $U \cap V = \phi$ olur. $f^{-1}(U)$ ve $f^{-1}(V)$ yi alalım.

$p \in f^{-1}(U)$, $F \subset f^{-1}(V)$ (sürekli fonksiyonun tersi de süreklidir.)

$f^{-1}(U)$ X'de açık, $f^{-1}(V)$ X'de açık.

$f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) \neq \phi$ olsaydı $\exists x \in f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$ bulunurdu.

$$\left.\begin{array}{l} x \in f^{-1}(U) \Rightarrow f(x) \in U \\ x \in f^{-1}(V) \Rightarrow f(x) \in V \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \in U \cap V \Rightarrow U \cap V \neq \phi \text{ olur.}$$

Bu ise bir çelişkidir. Kabulümüz yanlıştır. (X,τ) düzenli uzaydır.

5.8. Tanım: Büsbütün düzenli her T_1 uzayına Tychonoff uzayı denir.   Tychonoff = büsbütün düzenli + T_1

Açıklama: Urysohn Lemmasından dolayı her T_4 uzayı bir Tychonoff uzayıdır. Her normal uzay bir büsbütün düzenli uzaydır.

Her Tychonoff uzayı bir T_3 uzayıdır.

$$\left\{ T_3 \longrightarrow Tyc = T_{3\frac{1}{2}} \longrightarrow T_4 \right\}$$